Problema 791.-

ABC es un triángulo y su círculo circunscrito (Γ).
D es un punto corriente de (Γ).
Las líneas AC y BD se cortan en un punto P.
Las líneas AB y CD se cortan en un punto Q.
Las líneas BC y AD se cortan en un punto R.
Las líneas AC y QR se cortan en un punto S.
Las líneas BD y QR se cortan en un punto T.
Sea M y N los puntos medios de las cuerdas AC y BD.

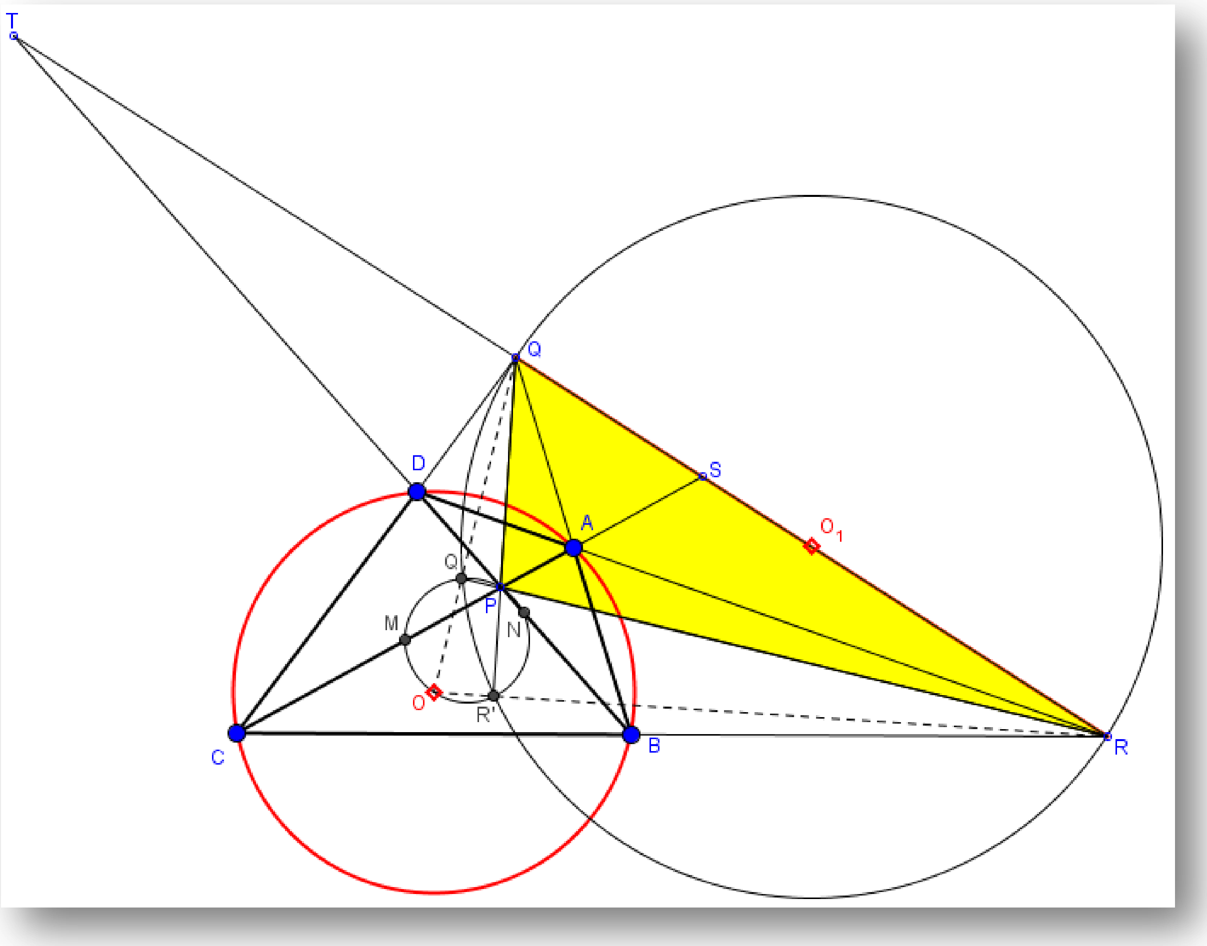
Demostrar que el círculo de diámetro QR es ortogonal a:

1) el círculo (Γ).
2) el círculo de diámetro ST.
3) el círculo circunscrito a triangulo MNP.

Fondanaiche, P. (2016): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Una vez construida la figura, veamos los siguientes hechos de interés:



Hecho 1.-
Según el ***Teorema de Brocard*** para el cuadrilátero ABCD inscrito en la circunferencia de centro O, el triángulo PQR tiene como ortocentro al punto O. Veamos esto con mayor detalle:
Por el ***Teorema de Brianchon*** aplicado al cuadrilátero ABCD, las tangentes a la circunferencia Γ , en los puntos C y D se cortan en un punto G, que estará alineado con P y R. Reiterando dicho Teorema y considerando ahora las tangentes en A y B, estas se cortarán en un punto H, también alineado con P y R.
En definitiva, como CD y AB se cortan en el punto Q, la polar del punto Q respecto de la circunferencia Γ no será otra que la línea PR. De este modo, $OQ \perp PR$. Por un mismo razonamiento, la polar del punto R será la recta PQ. De este modo, $OR \perp PQ$. En definitiva, O es el ortocentro del triángulo PQR.

Hecho 2.-
Consideramos ahora la inversión respecto de la circunferencia Γ. La imagen de la circunferencia de diámetro QR será otra circunferencia. La imagen por esta inversión, transforma el punto Q en el punto Q', que al estar sobre la polar del punto Q, lo estará sobre la recta PR, siendo precisamente el pie de la perpendicular trazada desde Q hacia el lado PR del triángulo PQR. Por tanto, Q' al abarcar el segmento QR bajo un ángulo de 90º, estará sobre la misma circunferencia de diámetro QR. En definitiva, Q' pertenece a esa misma circunferencia. Del mismo modo, R' la imagen del punto R estará sobre esta misma circunferencia. Por tanto la circunferencia de diámetro QR es invariante bajo esa inversión. Por tanto, ambas circunferencias son ortogonales.

Hecho 3.-
Aplicando el ***teorema de Pascal*** al cuadrilátero $ABCD$, resulta que los puntos $Q, R, S\ y\ T$ están separados armónicamente. Por tanto como la circunferencia de diámetro QR es ortogonal a la circunferencia Γ, lo será igualmente la de diámetro ST ya que la inversión preserva los ángulos.

Hecho 4.-
Por el ***Teorema de Brianchon*** aplicado al cuadrilátero ABCD, las tangentes a la circunferencia Γ, en los puntos A y C se cortan en un punto E, que estará alineado con T y S. Por tanto, la recta AC será la polar del punto E. El punto M, punto medio del lado AC será la imagen por la inversión del punto E.
En definitiva, $OM \perp MP \rightarrow$ el punto O pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo MNP.
El diámetro de esta circunferencia será el segmento OP. Podíamos haber razonado este mismo hecho con el punto N, punto medio del lado BD.
Además a esta circunferencia de diámetro OP pertenecerá también los puntos Q' y R'. En definitiva, por la inversión considerada, esta circunferencia se transforma en la recta que pasa por Q, R, S y T.
Este hecho querrá decir que ambas circunferencias serán ortogonales.