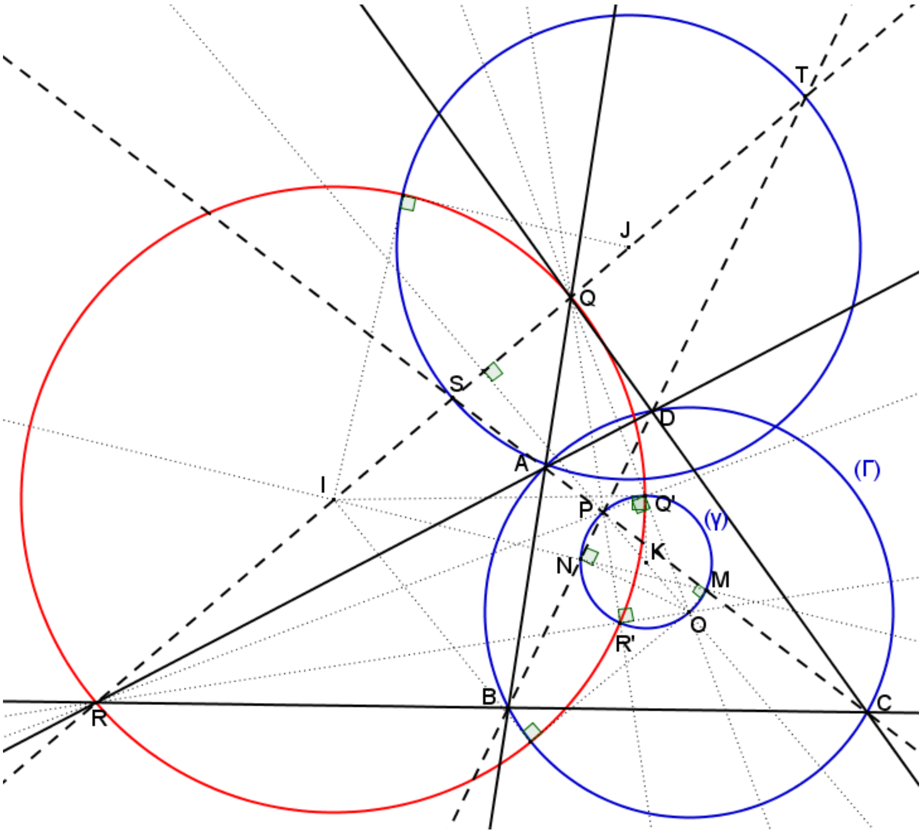
Problema 791.
ABC es un triángulo y su círculo circunscrito (Γ)
D es un punto corriente de (Γ)
Las líneas AC y BD se cortan en un punto P.
Las líneas AB y CD se cortan en un punto Q
Las líneas BC y AD se cortan en un punto R.
Las lineas AC y QR se cortan en un punto S.
Las lineas BD y QR se cortan en un punto T.
Sea M y N los puntos medios de las cuerdas AC y BD.
Demostrar que el círculo de diámetro QR es ortogonal a :
1) el círculo (Γ)
2) el circulo de diámetro ST
3) el círculo circunscrito a triangulo MNP

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Par définition, deux cercles sécants dans un plan sont dits **orthogonaux** si en chacun des deux points d'intersection les tangentes à l'un et à l'autre cercle sont orthogonales ou en d'autres termes **si le triangle formé par les centres des deux cercles et l'un des points d'intersection est rectangle en ce point**. Il en résulte que **chacun des deux cercles est invariant dans l'inversion ayant pour pôle le centre de l'autre cercle et pour puissance le carré du rayon de ce dernier.**

On va démontrer successivement que le cercle de diamètre QR est orthogonal au:

1) cercle (Γ)

Par construction la droite PR est la polaire de Q par rapport au cercle (Γ) de centre O et de rayon r. Elle coupe la droite OQ qui lui est perpendiculaire au point Q' qui est l'inverse de Q dans l'inversion de pôle O et de puissance r^2 .

La droite PQ est la polaire de R par rapport à ce même cercle. Elle coupe la droite OR qui lui est perpendiculaire au point R' qui est l'inverse de R dans l'inversion de pôle O et de puissance r^2 .

Comme les angles $\angle QQ'R$ et $\angle QR'R$ sont droits, les points Q' et R' appartiennent au cercle de diamètre QR. Celui-ci est invariant dans l'inversion de pôle O et de puissance r^2.Il est donc orthogonal au cercle (Γ)

2) cercle de diamètre ST

Lemme n°1: dans le quadrilatère complet ABCDQR, les diagonales AC et BD coupent la diagonale QR en deux points S et T qui forment une division harmonique avec les points Q et R.

Démonstration: il s'agit de démontrer que QS/SR = QT/TR

Le théorème de Ceva appliqué au triangle CQR et aux céviennes CS,QB et RD donne la relation CD/DQ * QS/SR * RB/BC = 1

Le théorème de Menelaüs appliqué au même triangle CQR et à la droite BDT donne la relation CD/DC * QT/TR * RB/BC = 1

De ces deux relations, on déduit QS/SR = QT/TR .Cqfd.

Lemme n°2: dans une division harmonique Q,R,S,T les points I et J milieux respectifs des segments QR et ST sont tels que $IQ^2 = IR^2 = IS*IT$ et $JS^2 = JT^2 = JQ*JR$

Démonstration: de l'égalité QS/SR = QT/TR, on déduit QS*TR = SR*QT soit (IQ – IS)*(IT + IQ) = (IS + IQ)*(IT – IQ) qui après simplification se ramène à $IQ^2 = IS*IT$.

De manière symétrique, on obtient $JS^2 = JT^2 = JQ*JR$.

De ce lemme, on déduit que les cercles de diamètre QR et ST sont inverses l'un de l'autre dans l'inversion de centre I et de puissance IQ^2 comme dans l'inversion de centre J et de puissance JS^2. Ils sont donc orthogonaux.

3) cercle (γ) circonscrit au triangle MNP

M et N étant les milieux des cordes AC et BD dans le cercle (Γ), OM et ON sont respectivement perpendiculaires à AC et BD et le triangle (γ) circonscrit au triangle MNP admet OP comme diamètre. Soit K centre de ce cercle situé sur la droite OP.Comme les angles $\angle QQ'R$ et $\angle QR'R$ sont droits (voir supra), les points Q' et R' appartiennent au cercle (γ).

Par ailleurs:

- la droite QR étant la polaire de P par rapport au cercle (Γ) est perpendiculaire à la droite OK,
- les droites OQ' et OK sont respectivement perpendiculaires aux droites Q'R et QR.

D'où $\angle IRQ' = \angle IQ'P = \angle KOQ' = \angle KQ'O$.

Comme les droites RQ' et OQ' sont perpendiculaires, il en est de même des droites IQ' et KQ'.

Le triangle IQ'K est donc rectangle en l'un des points d'intersection Q' du cercle de diamètre QR et du cercle (γ).Ces deux cercles orthogonaux entre eux.