Quincena del 1 al 15 de Noviembre de 2016.

Problema 791

Propuesto por Philippe Fondanaiche, webmaster de www.diophante.fr

ABC es un triángulo y su círculo circunscrito (Γ). D es un punto corriente de (Γ). Las líneas AC y BD se cortan en un punto P. Las líneas AB y CD se cortan en un punto Q. Las líneas BC y AD se cortan en un punto R. Las líneas AC y QR se cortan en un punto S. Las líneas BD y QR se cortan en un punto T. Sea M y N los puntos medios de las cuerdas AC y BD.

Demostrar que el círculo de diámetro QR es ortogonal a:

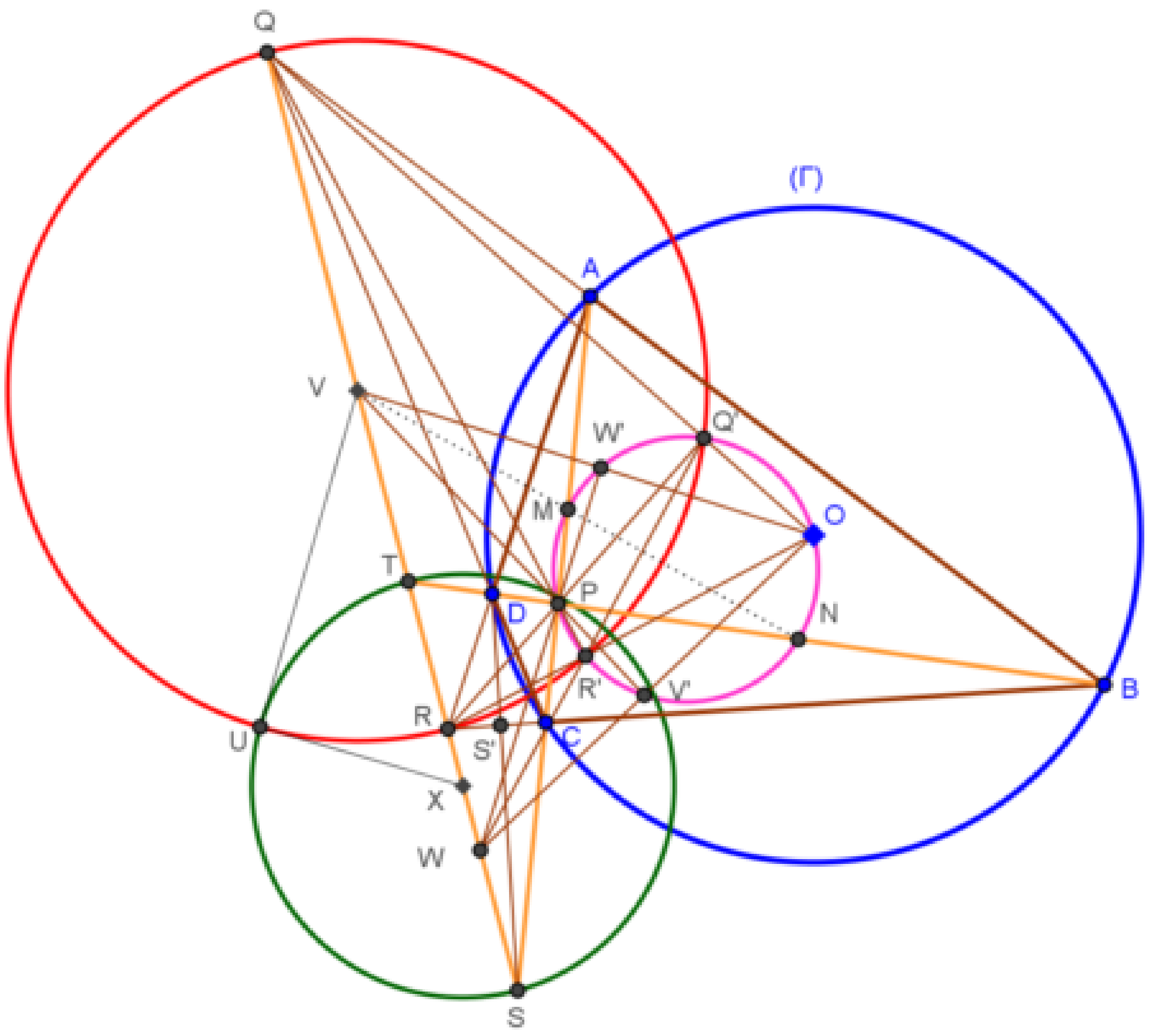
1) *El círculo (Γ).*
2) *El círculo de diámetro ST.*
3) *El círculo circunscrito al triángulo MNP.*

Fondanaiche, P. (2016): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

1) Las rectas OM y AC; ON y BD son perpendiculares, por tanto $\sphericalangle OMP = 90°$ y $\sphericalangle ONP = 90°$, es decir, la circunferencia circunscrita a MNP también pasa por O y OP es un diámetro de la misma.

El triángulo PQR (formado por los puntos diagonales del cuadrilátero cíclico $ABCD$) es autopolar y su ortocentro el centro O de (Γ).



Dado que P es el ortocentro del triángulo OQR, si Q' es el pie de la altura de este triángulo desde R, al ser OP y RQ diámetros tenemos que Q' está en las circunferencias (RQ) y (MNP). Análogamente también R', pie de la altura desde Q, está en la intersección de esas circunferencias.

De otra parte, la polar de Q respecto de (Γ) es la recta PR perpendicular OQ, por tanto Q' es el inverso de Q respecto de esa circunferencia. También R', por igual motivo, es el inverso de R. En resumen la circunferencia (RQ) es invariante por la inversión respecto de (Γ), por tanto esas dos circunferencias son ortogonales.

2) Veamos primeramente que la cuaterna $(STQR)$ es armónica.

En el cuadrivértice $RQAC$, los puntos diagonales (vértices del triángulo diagonal) son S, D y B.

Un punto diagonal tiene la propiedad de que sus lados están armónicamente separados por las rectas lo unen con los otros puntos diagonales. Para el punto S tenemos la cuaterna armónica (SD, SB, SC, SR). Si se intersecta con BC resultará $(S'BCR) = -1$, donde $S' = SD \cap BC$. Proyectando ésta última sobre QR desde D se obtiene $(S'BCR) = -1 = (STQR)$.

Si el segmento QR está separado armónicamente por el segmento TS, la mitad del segmento, por ejemplo VR es la media geométrica entre VT y VS, o sea,

$$VR^2 = VS \cdot VT = \text{Pot}(V;(ST)) = VX^2 - XS^2$$

que demuestra que las circunferencias de diámetros QR y ST son ortogonales.

3) Procederemos como en el punto 1). La circunferencia (Γ) será sustituida por la de diámetro RS. En vez de tener un cuadrilátero $ABCD$, ahora tenemos el cuadrilátero $QRR'Q'$, cuyo triángulo diagonal es OPW de ortocentro V. Al ser P el ortocentro de OVW, llamando W' al pie de la altura desde W, igual que en 1), por ser OP diámetro de (MNP), resulta que W' está en esta circunferencia. Para el pie V' de la altura desde V se llega a igual conclusión.

La polar de O respecto de (RS) es PW, perpendicular a OV, por tanto W' es el inverso de O respecto de esta circunferencia. Análogamente V' es el inverso de P en la misma transformación, pues la polar de P es OW ... etc.

De todo lo anterior, la circunferencia (MNP) es invariante por la inversión respecto de (RS), por tanto esas dos circunferencias son ortogonales.

Podemos añadir que V está alineado con M y N (propiedad de los puntos medios de los segmentos diagonales) y entonces M y N son homólogos en esa inversión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. *Introducción a la Geometría Moderna*, L. Shively (se encuentra en Internet en formato PDF).
2. *Geométrica Métrica* vol I, Puig Adam.■