Pr. Cabri 792

Enunciado

Dado un triángulo ABC cuyos lados miden a =BC, b=CA, c= AB, demuestre que a^2-b^2=bc si y solo si < CAB = 2 <ABC.
De Diego y otros (2014):Problemas de oposiciones al Cuerpo de Enseñanza Secundaria.

Solución
por César Beade Franco

Del teorema del coseno sabemos que $a^2=b^2+c^2$-2bcCosA y $b^2=a^2+c^2$-2acCosB. Restando la segunda ecuación de la primera y agrupando términos obtenemos a^2-b^2=acCosB-bcCosA (*).
Si suponemos que a^2-b^2=bc, la expresión (*) se transforma en bc=acCosB-bcCosA ⇒ b=aCosB-bCosA ⇒ b(1+CosA)=aCosB ⇒ CosA = $\frac{\text{aCosB}}{b}$-1 ⇒ CosA = $\frac{\text{SenACosB}}{\text{SenB}}$-1, pues del teorema del seno sabemos que $\frac{a}{b}=\frac{\text{SenA}}{\text{SenB}}$, así que CosASenB=SenACosB-SenB
⇒ SenB=SenACosB-CosASenB ⇒ SenB=Sen(A-B) ⇒ B=A-B ⇒ A=2B.
Recíprocamente si en (*) suponemos que A=2B, esta expresión se transforma en a^2-b^2=c(aCosB-bCosA)=c(aCosB-bCos2B). Del teorema del seno deducimos que $\frac{a}{b}=\frac{\text{Sen2B}}{\text{SenB}}$=2CosB ⇒ a=2bCosB, con lo que la igualdad anterior queda
a^2-b^2= c(2bCos^{2}B-b(Cos^{2}B-Sen^{2}B))=cb(2Cos^{2}B-Cos^{2}B+Sen^{2}B)=bc.