Problema 792.-

Dado un triángulo ABC cuyos lados miden $a = BC, b = CA, c = AB$, demuestre que $a^2 - b^2 = bc$ si y solo si $\measuredangle CAB = 2\measuredangle ABC$.

De Diego y otros (2014): Problemas de oposiciones al Cuerpo de Enseñanza Secundaria. Tomo 6. (p. 133) (Ceuta) Editorial Deimos.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

$\measuredangle CAB = 2\measuredangle ABC \Rightarrow [a^2 - b^2 = bc]$

Reiterando el Teorema del Coseno para los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle ABC$, tenemos que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\measuredangle CAB$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\measuredangle ABC$

Por tanto, restando ambas expresiones, llegamos a que $a^2 - b^2 = c \cdot (a\ cos\measuredangle ABC - b\ cos\measuredangle CAB)$

Nos quedamos con esta última expresión, $a\ cos\measuredangle ABC - b\ cos\measuredangle CAB$.
vamos a probar que si $\measuredangle CAB = 2\measuredangle ABC \Rightarrow a\ cos\measuredangle ABC - b\ cos\measuredangle CAB = b$.
$a\ cos\measuredangle ABC - b\ cos\measuredangle CAB = b \Leftrightarrow a\ cos\measuredangle ABC = b(1 + \cos 2\measuredangle ABC) \Leftrightarrow a\ cos\measuredangle ABC = 2b \cdot cos^2\measuredangle ABC$

En definitiva, $a\ cos\measuredangle ABC - b\ cos\measuredangle CAB = b \Leftrightarrow a \cdot cos\measuredangle ABC = 2b \cdot cos^2\measuredangle ABC$

Si $cos\measuredangle ABC = 0 \rightarrow \measuredangle ABC = 90º \rightarrow \measuredangle CAB = 180º$ $(Absurdo)$

Por tanto, $cos\measuredangle ABC \neq 0 \rightarrow cos\measuredangle ABC = \frac{a}{2b}$.

Por el Teorema de los senos, $\frac{sen\measuredangle CAB}{sen\measuredangle ABC} = \frac{a}{b}$.

Si $\measuredangle CAB = 2\measuredangle ABC \rightarrow \frac{sen\measuredangle CAB}{sen\measuredangle ABC} = \frac{sen2.\measuredangle ABC}{sen\measuredangle ABC} = \frac{2 \cdot sen\measuredangle ABC.cos\measuredangle ABC}{sen\measuredangle ABC} = \frac{a}{b} \rightarrow cos\measuredangle ABC = \frac{a}{2b}$.

$[a^2 - b^2 = bc] \Rightarrow \measuredangle CAB = 2\measuredangle ABC$

De la hipótesis, deducimos que $\measuredangle CAB > \measuredangle ABC$. Por tanto, el ángulo $\measuredangle ABC$ ha de ser agudo.

Sabemos que: $a^2 - b^2 = c \cdot (a\ cos\measuredangle ABC - b\ cos\measuredangle CAB)$

Por tanto, $b = a\ cos\measuredangle ABC - b\ cos\measuredangle CAB$

Es decir, $b(1 + cos\measuredangle CAB) = a\ cos\measuredangle ABC \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 + cos\measuredangle CAB}{cos\measuredangle ABC}$.

Por otro lado, $\frac{a}{b} = \frac{sen\measuredangle CAB}{sen\measuredangle ABC}$.

En definitiva,

$\frac{1 + cos\measuredangle CAB}{cos\measuredangle ABC} = \frac{sen\measuredangle CAB}{sen\measuredangle ABC} \rightarrow sen\measuredangle ABC = sen\measuredangle CAB \cdot cos\measuredangle ABC - cos\measuredangle CAB \cdot sen\measuredangle ABC$.

Ahora bien, $sen(\measuredangle CAB - \measuredangle ABC) = sen\measuredangle CAB \cdot cos\measuredangle ABC - cos\measuredangle CAB \cdot sen\measuredangle ABC$.

Por tanto, $sen\ \measuredangle ABC = sen(\measuredangle CAB - \measuredangle ABC)$

Como el ángulo $\measuredangle ABC$ ha de ser agudo, $\measuredangle ABC = (\measuredangle CAB - \measuredangle ABC) \rightarrow \measuredangle CAB = 2 \cdot \measuredangle ABC$.