Problema 792

14.25.- Dado un triángulo ABC cuyos lados miden a =BC, b=CA, c= AB, demuestre que

a^2-b^2=bc si y solo si < CAB = 2 <ABC.

De Diego y otros (2014): Problemas de oposiciones al Cuerpo de Enseñanza Secundaria. Tomo 6. (p. 133)(Ceuta) Editorial Deimos.

Solución del director:

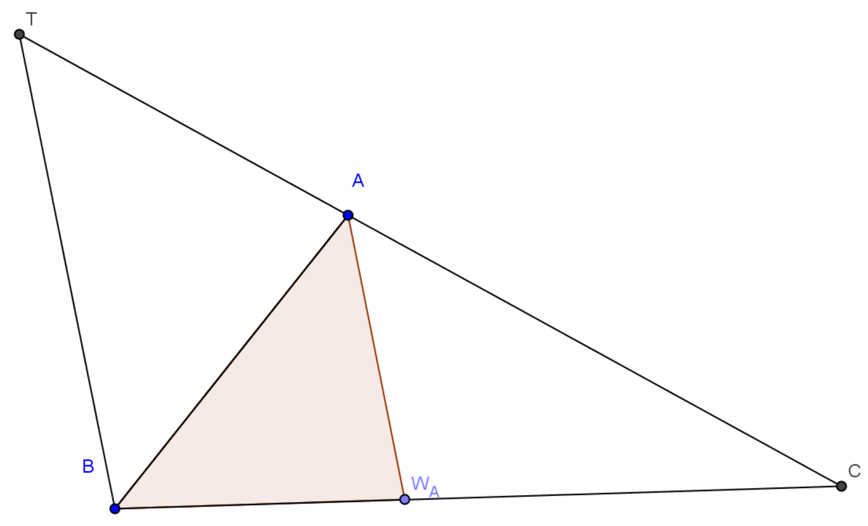
Sea a^2-b^2=bc . Es $c = \frac{a^2-b^2}{b}$.

Así, si la bisectriz desde el vértice A es AW_A , es:

$$AW_A = \sqrt{bc(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}} = \sqrt{b\frac{a^2-b^2}{b}\left(1-\frac{a^2}{\left(b+\frac{(a^2-b^2)}{b}\right)^2}\right)} = \frac{a^2-b^2}{a}$$

Por otra parte, es: $BW_A = \frac{ac}{(b+c)} = \frac{a\frac{a^2-b^2}{b}}{(b+\frac{a^2-b^2}{b})} = \frac{a^2-b^2}{a}$.

Así, el triángulo ABW_A es isósceles, y < CAB = 2 <ABC, cqd.



Sea ahora < CAB = 2 <ABC.

Si prolongamos el triángulo ABC, a, b , c , al TBC, a, b+c, m, de manera que BAT sea isósceles, con $\angle TBA = \angle ATB$, es:

$CBT \approx CAB$, de donde $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a} = \frac{m}{c}$

De donde se tiene que $a^2=b^2+bc$, es decir, $a^2-b^2=bc$. Cqd.

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.

Sevilla.