Problema 792. Dado un triángulo $\triangle ABC$ cuyos lados miden $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, demuestre que $a^2 - b^2 = bc$ si y solo si $\angle CAB = 2\angle ABC$.

De Diego y otros, Problemas de oposiciones al Cuerpo de Enseñanza Secundaria. Tomo 6. (p. 133) Editorial Deimos (2014).

Solución de Ercole Suppa.

Utilizamos las notaciones de geometría del triángulo: R = circunradio, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$. Por supuesto, teniendo en cuenta las relaciones conocidas $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ y $c = 2R\sin\gamma$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha = 2\beta \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha - \beta = \beta \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin(\beta) \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(\alpha - \beta)\sin\gamma = \sin\beta\sin\gamma \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta\sin\gamma \\
&\Leftrightarrow \quad (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \sin\beta\sin\gamma \\
&\Leftrightarrow \quad \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin\beta\sin\gamma \\
&\Leftrightarrow \quad \sin^2\alpha\left(1 - \sin^2\beta\right) - \left(1 - \sin^2\alpha\right)\sin^2\beta = \sin\beta\sin\gamma \\
&\Leftrightarrow \quad \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin\beta\sin\gamma \\
&\Leftrightarrow \quad 4R^2\sin^2\alpha - 4R^2\sin^2\beta = 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 = bc
\end{aligned}$$

y esto concluye la demostración. $\square$