Problema 792

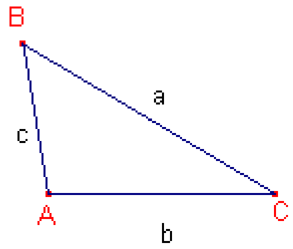
Demostreu que si entre els costats a, b, c d'un triangle existeix la dependència $a^2 - b^2 = bc$ si i només si $A = 2B$.

Solució de Ricard Peiró.

$(\Rightarrow)$

Solució 1:

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.

Restant ambdues relacions:

$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 2c(b \cdot \cos A - a \cdot \cos B)$

$a^2 - b^2 = -c(b \cdot \cos A - a \cdot \cos B)$

Sabem que $a^2 - b^2 = bc$ substituint en la relació anterior:

$bc = -c(b \cdot \cos A - a \cdot \cos B)$, simplificant:

$b = a \cdot \cos B - b \cdot \cos A$ (1)

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $a = \dfrac{b \cdot \sin A}{\sin B}$ (2)

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$b = \dfrac{b \cdot \sin A}{\sin B} \cos B - b \cdot \cos A$. Simplificant:

$1 = \dfrac{\sin A}{\sin B} \cos B - \cos A$.

$\sin B = \sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin(A - B)$.

Aleshores, $B = A - B$. Per tant, $A = 2B$.

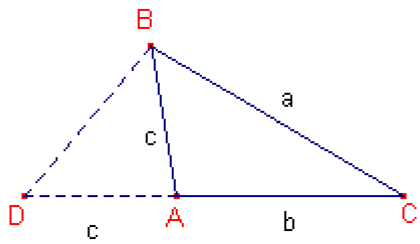
Solució 2 (per V. Lidski "Problemas de Matemáticas elementales" problema 349):

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $a^2 - b^2 = bc$ (3)

Sobre la prolongació del costat $\overline{AC}$ tracem $\overline{AD} = c$.

De la igualtat (3) tenim que:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{b + c}{a}$, per tant, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BDC}$ són semblants.



Aleshores, $A = \angle CBD$, $B = \angle BDA$.

El triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles, aleshores,

$B = \angle BDA = \angle DBA$.

$A = \angle CBD = B + \angle DBA = 2B$.

$(\Leftarrow)$

Siga $A = 2B$.

Sobre la prolongació del costat $\overline{AC}$ construïm el punt D tal que $\angle DBA = B$.

$\angle DAB = 180^\circ - A = 180^\circ - 2B$

Aleshores, $\angle BDA = B$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BDC}$ són semblants. Aplicant el teorema de tales:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{b + c}{a}$, per tant, $a^2 - b^2 = bc$.