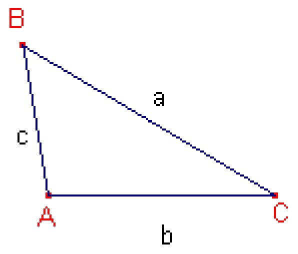
Problema 792

Dado un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cuyos lados miden a =BC, b=CA, c= AB, demuestre que

$a^2 - b^2 = bc$ si y solo si < CAB = 2 <ABC.

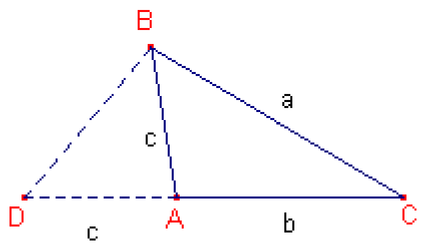
De Diego y otros (2014): Problemas de oposiciones al Cuerpo de Enseñanza Secundaria. Tomo 6. (p. 133)(Ceuta) Editorial Deimos.

Solución de Ricard Peiró.
($\Rightarrow$)
Solución 1:



Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.
Restando ambas relaciones:
$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 2c(b \cdot \cos A - a \cdot \cos B)$
$a^2 - b^2 = -c(b \cdot \cos A - a \cdot \cos B)$
Sabemos que $a^2 - b^2 = bc$ substituyendo en la relación anterior:
$bc = -c(b \cdot \cos A - a \cdot \cos B)$, simplificando:
$b = a \cdot \cos B - b \cdot \cos A$ (1)
Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$: $a = \dfrac{b \cdot \sin A}{\sin B}$ (2)
Substituyendo la expresión (2) en la expresión (1):
$b = \dfrac{b \cdot \sin A}{\sin B} \cos B - b \cdot \cos A$. Simplificando:
$1 = \dfrac{\sin A}{\sin B} \cos B - \cos A$.
$\sin B = \sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin(A - B)$.
Entonces, $B = A - B$. Por tanto, $A = 2B$.

Solución 2 (por V. Lidski “Problemas de Matemáticas elementales” problema 349):



Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $a^2 - b^2 = bc$ (3)
Sobre la prolongación del lado $\overline{AC}$ trazamos $\overline{AD} = c$.
De la igualdad (3) tenemos que:
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{b + c}{a}$, per tanto, los triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BDC}$ son semejantes.
Entonces, $A = \angle CBD$, $B = \angle BDA$.

El triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$ es isósceles, entonces,
$B = \angle BDA = \angle DBA$.
$A = \angle CBD = B + \angle DBA = 2B$.
($\Leftarrow$)
Sea $A = 2B$.
Sobre la prolongación del lado $\overline{AC}$ construimos el punto D tal que $\angle DBA = B$.

$\angle DAB = 180º - A = 180º - 2B$
Entonces, $\angle BDA = B$.

Entonces, los triángulos $A\overset{\Delta}{B}C$, $B\overset{\Delta}{D}C$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:
$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, per tanto, $a^2 - b^2 = bc$.