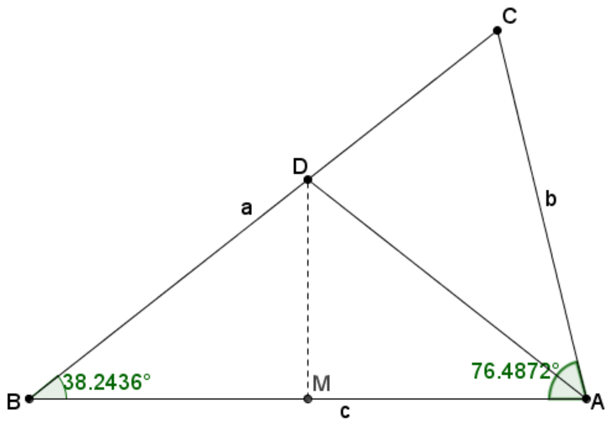
Problema 792

14.25.- Dado un triángulo ABC cuyos lados miden a =BC, b=CA, c= AB, demuestre que a^2-b^2=bc si y solo si < CAB = 2 <ABC.
De Diego y otros (2014): Problemas de oposiciones al Cuerpo de Enseñanza Secundaria. Tomo 6. (p. 133)(Ceuta) Editorial Deimos.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



1er cas : ∠CAB = 2∠ABC.

Soient BC = a, CA = b et AB = c, ∠ABC = α et ∠CAB = 2α.

On trace la bissectrice DA de l'angle ∠CAB. Le triangle ADB est isocéle de sommet D.

Soit M le milieu de AB. On a donc DB = BM/cos(α)= c/2cos(α) et DB/BA = 1/2cos(α).

Par ailleurs DB/BA= DC/CA = (DB + DC)/ (BA + CA) = a/(b + c).

Il en résulte DB/BA = 1/2cos(α) = a/(b + c) qui équivaut à cos(α) = (b + c) / 2a

D'autre part $b^2 = c^2 + a^2 – 2ac*cos(α)$ ou encore $cos(α) = (c^2 + a^2 – b^2)/2ac$.

En rapprochant les deux dernières relations, on obtient $c(b + c) = c^2 + a^2 – b^2$ soit $\mathbf{a^2 – b^2 = bc}$.

2ème cas : $a^2 – b^2 = bc$

En rapprochant les deux égalités $a^2 – b^2 = bc$ et $b^2 = c^2 + a^2 – 2ac*cos(α)$, on obtient (b + c) = 2acos(α).

Or DB/BA = a/(b+c) soit DB = ac/(b + c).

Il en résulte que DB = ac/(2acos(α)) = c/2cos(α).

Le point D est donc sur la verticale passant par le milieu M de BA.

Le triangle ADB est isocèle de sommet D.

Donc ∠ABC = ∠ABD = ∠BAD = ∠CAB/2. Cqfd.