Quincena del 1 al 15 de Noviembre de 2016.

***Problema* 792.**

14.25.- *Dado un triángulo* ABC *cuyos lados miden* $A = BC, b = AC, c = AB$, *demuestre que* $a^2 - b^2 = bc$ *si y solo si* $\measuredangle CAB = 2\measuredangle ABC$.

De Diego y otros (2014): Problemas de oposiciones al Cuerpo de Enseñanza Secundaria. Tomo 6.)(p. 133)(Ceuta). Editorial Deimos.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Supongamos que se verifica $a^2 - b^2 = bc$.

A partir del teorema del coseno podemos poner

$\cos B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac} = \frac{c^2+bc}{2ac} = \frac{c+b}{2a}$, $2a \cdot \cos B = c + b$ y $\cos A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{c^2-bc}{2bc} = \frac{c-b}{2b}$, $2b \cdot \cos A = c - b$. Restando estas expresiones eliminamos c y obtenemos

$a \cdot \cos B - b \cdot \cos A = b$

o bien

$$a \cdot \cos B = b(1 - \cos A)$$

Del teorema de los senos se obtiene

$$a \cdot \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$$

y dividiendo entre sí estas últimas

$$\tan B = \frac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} = \tan\frac{A}{2}$$

Esto implica necesariamente que $B = \frac{A}{2}$.

Recíprocamente si se tiene $\measuredangle A = 2\measuredangle B$, de $a \cdot \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$, se tiene

$a \cdot \operatorname{sen} B = 2b \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos B$ y de ahí $\cos B = \frac{a}{2b}$. Junto con $\cos B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$, nos permite escribir

$$bc^2 - a^2c + b(a^2 - b^2) = 0$$

Esta ecuación en c tiene como solución $c = b$ que ofrece una solución particular del problema: la que corresponde a un triángulo rectángulo isósceles. Eliminada ésta se obtiene $c = \frac{a^2-b^2}{b}$ que concluye el problema.

El problema 240 de esta revista (primera quincena de mayo 2005) es un caso particular de esta situación. Se trata de un triángulo cuyos lados son números consecutivos (4, 5 y 6) siendo el ángulo del mayor el doble del menor $(6^2 - 4^2 = 4 \cdot 5)$.■