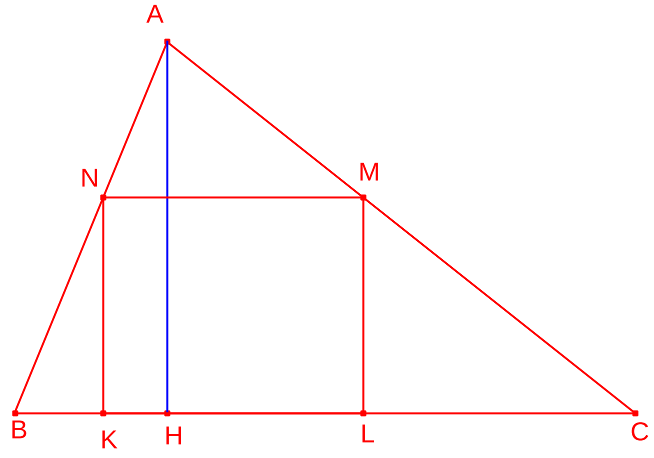
Problema 793

En un triángulo dado, inscribir un rectángulo que tiene por diagonal una longitud dada.

F. G.-M.(1912) Exercices de géometrie comprenant l`exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues. Cinquième èdition. (Paris)

Solución de Ricard Peiró:

Sea KLMN un rectángulo inscrito en el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.



Sea $\overline{KM} = d$ diagonal del triángulo.

Sea $\overline{KL} = x$, $\overline{KN} = y$, lados del rectángulo.

$x^2 + y^2 = d^2$.

Sea $\overline{AH} = h_a$ altura del triángulo.

Los triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ANM}$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{h_a - y}{h_a} = \frac{x}{a}.$$

$$x = a - \frac{a}{h_a} y.$$

$$\left(a - \frac{a}{h_a} y\right)^2 + y^2 = d^2.$$

$$\left(a^2 + h_a{}^2\right)y^2 - 2a^2 h_a + h_a{}^2\left(a^2 - d^2\right) = 0.$$

Resolviendo la ecuación:

$$y = \frac{a^2 h_a \pm h_a \sqrt{a^2 d^2 + d^2 h_a{}^2 - a^2 h_a{}^2}}{a^2 + h_a{}^2}.$$

Considerando los otros tres lados el problema puede tener hasta seis soluciones:

$$y = \frac{b^2 h_b \pm h_b \sqrt{b^2 d^2 + d^2 h_b{}^2 - b^2 h_b{}^2}}{b^2 + h_b{}^2}$$

$$y = \frac{c^2 h_c \pm h_c \sqrt{c^2 d^2 + d^2 h_c{}^2 - c^2 h_c{}^2}}{c^2 + h_c{}^2}$$