Problema 794.-

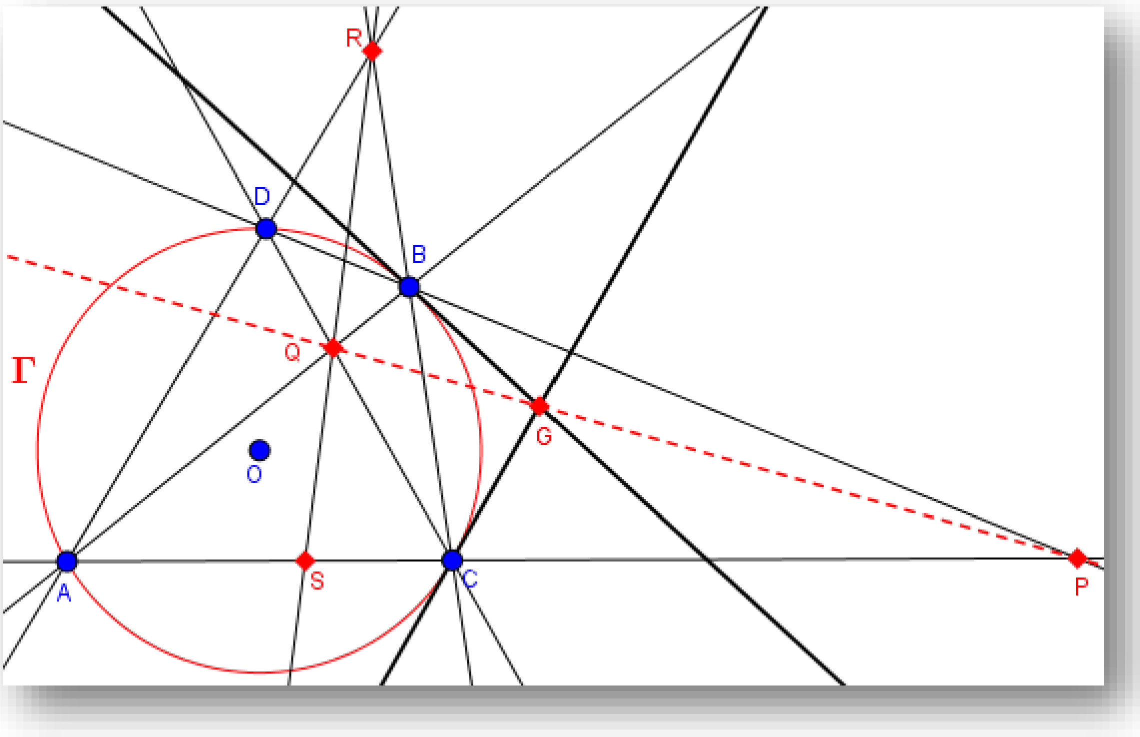
ABC es un triángulo y su círculo circunscrito (Γ).
D es un punto corriente de (Γ).
Las líneas AC y BD se cortan en un punto P.
Las líneas AB y CD se cortan en un punto Q.
Las líneas BC y AD se cortan en un punto R.
Las líneas AC y QR se cortan en un punto S.
Cuando el punto D recorre el círculo Γ

1) Demostrar que la recta PQ pasa por un punto fijo que se determinará.
2) Encontrar el lugar del segundo punto de intersección de los círculos circunscritos a los triángulos ABS y CDS.

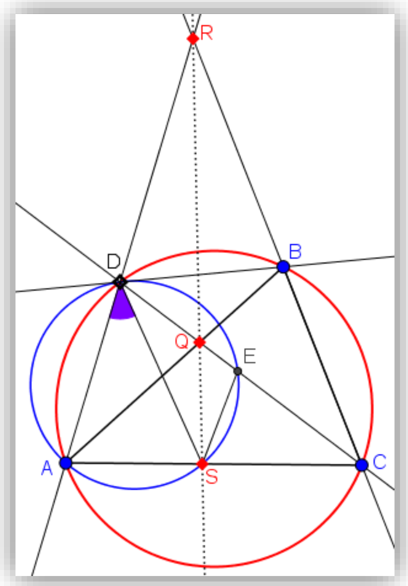
Fondanaiche, P. (2016): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Apartado (1).
Una vez construida la figura, observamos que aplicando el ***Teorema de Brianchon*** al cuadrilátero ADBC, las tangentes a la circunferencia Γ en los puntos B y C se cortan en un punto G, que estará alineado con P y Q.
En definitiva, como este punto G viene únicamente determinado por los vértices B y C y la circunferencia circunscrita Γ al triángulo ABC, la recta PQ pasa por este punto fijo G.



Apartado (2).



Lema previo. (sin demostración). Si el punto D recorre la circunferencia Γ, el ángulo $\measuredangle ADS$ es constante y fijo.

Corolario.

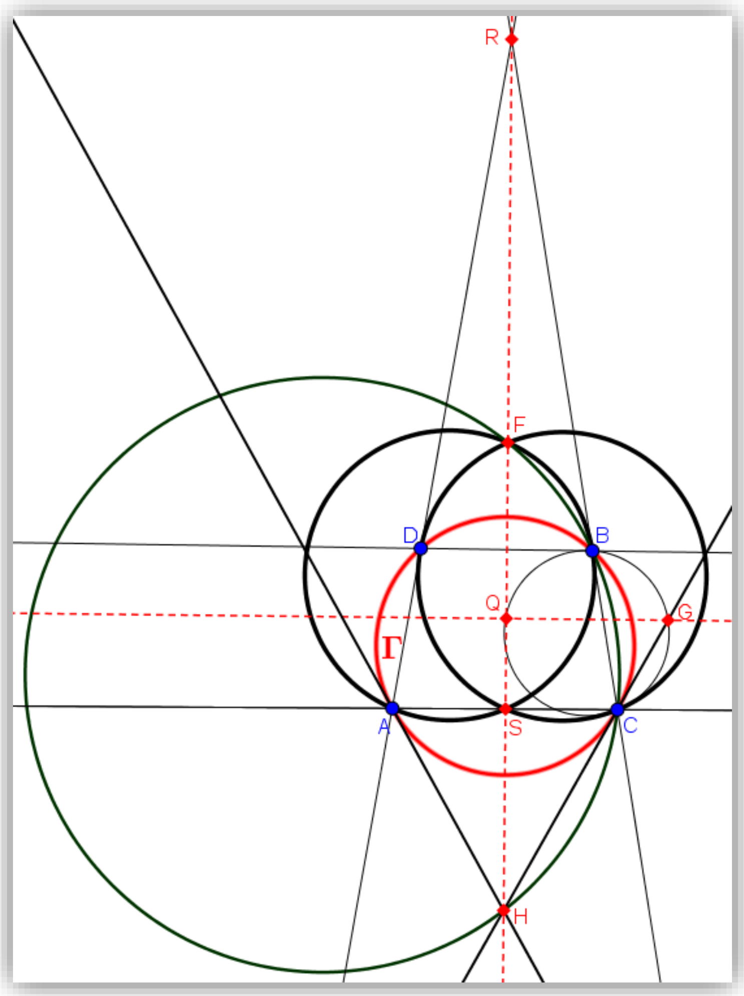
Si el punto D recorre la circunferencia Γ, el ángulo $\measuredangle CDS$ es constante y fijo.

Dem. – Trivial a partir del Lema previo, ya que
$\measuredangle ADC = \pi - \measuredangle C$

Apuntes para una solución.

Sea F el segundo punto de intersección de los círculos circunscritos a los triángulos ABS y CDS. Vamos a probar que el ángulo $\measuredangle BFC$ es fijo y constante para cualquier posición del punto D y, por tanto, del punto F.

Para ello, veamos que $\measuredangle BFC = \measuredangle CFS = \measuredangle BAS\ (= \measuredangle BAC) - \measuredangle CFS = \measuredangle BAC - \measuredangle CDS$.



Ahora bien, por el Corolario previo, $\measuredangle CDS$ es fijo y constante. Por tanto, en efecto, $\measuredangle BFC$ es fijo y constante y de este modo, F ha de pertenecer al arco capaz sobre el segmento AB y bajo el ángulo $\measuredangle BFC$.

Ahora bien, a este Lugar también pertenecerá el punto H, intersección de las rectas tangentes a la circunferencia Γ, en los puntos A y C, ya que es el punto H el punto fijo de la recta RS cuando D recorre la circunferencia Γ, (apartado 1).

En definitiva, el LG del punto F será la circunferencia circunscrita al triángulo BCH.