Quincena del 16 al 30 de noviembre de 2016.

Propuesto por Philippe Fondanaiche, webmaster de www.diophante.fr

Problema 794.- *ABC es un triángulo y su circulo circunscrito (Γ). D es un punto genérico de (Γ).Las líneas AC y BD se cortan en un punto P. Las líneas AB y CD se cortan en un punto Q. Las líneas BC y AD se cortan en un punto R. Las líneas AC y QR se cortan en un punto S.*

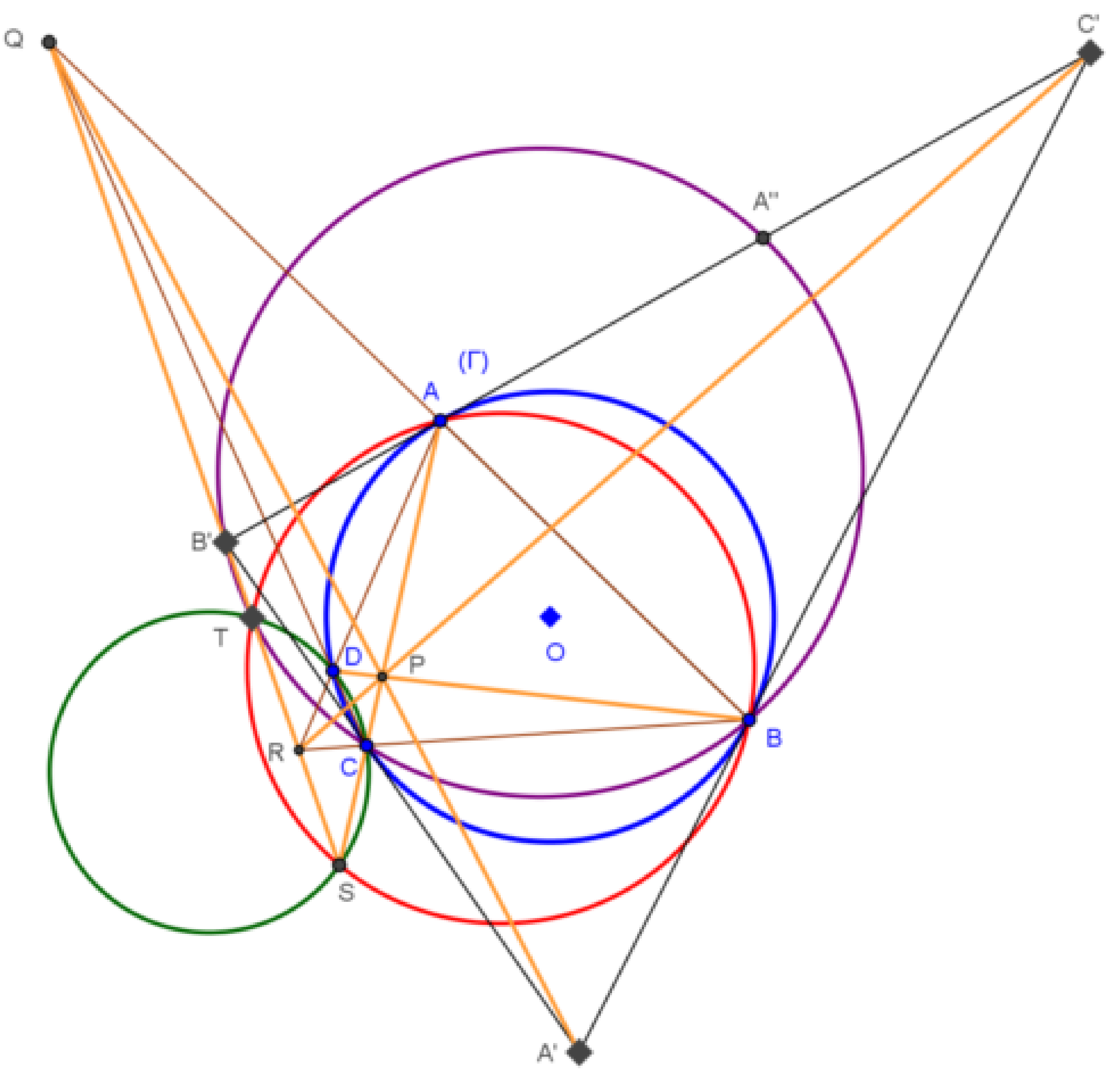
Cuando el punto D recorre el círculo (Γ),

1) Demostrar que la recta PQ pasa por un punto fijo que se determinará.

2) Encontrar el lugar del segundo punto de intersección de los círculos circunscritos a los triángulos ABS y CDS.

Fondanaiche, P. (2016): Comunicación personal.

Solución en coordenadas baricéntricas, de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



1) Para cualquier punto D sobre la circunferencia circunscrita, el correspondiente punto R está en la recta BC. El polo de PQ es R, sobre BC, por tanto el polo de BC es A' sobre PQ. Todas las rectas PQ al variar D pasan por el polo A' de BC. Este punto A' es la intersección de las tangentes al triángulo en los vértices B y C del mismo, es un vértice del triángulo tangencial $A'B'C'$. Un razonamiento similar prueba que QR pasará por B' y PR por C'.

2) La observación de la figura nos indica que el segundo punto de intersección de esas circunferencias que vamos a llamar T, está situado sobre una circunferencia que pasa por B', B y C.

No es complicado ver que cuando el punto D coincide con B o con C el punto T también coincide con D.

Un argumento geométrico sencillo demuestra que este punto T está en el eje radical de las circunferencias (ABS) y (CDS). Sin embargo lo demostraremos tomando coordenadas baricéntricas referidas al triángulo ABC.

Con ellas tenemos $B' = (a^2{:}-b^2{:}c^2)$; $D = (u{:}v{:}w)$ y así $R = (0{:}v{:}w)$; $Q = (u{:}v{:}0)$;

$P = (u{:}0{:}w)$; $S = (u{:}0{:}-w)$; la recta QR tiene ecuación $\frac{x}{u} - \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0$.

Para la circunferencia circunscrita (Γ): $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$. Nos referiremos a ella como $\Gamma(x, y, z) = 0$ o simplemente Γ.

Tenemos también $\Gamma(D) = 0$; $\Gamma(B') = -a^2b^2c^2$; $\Gamma(Q) = c^2uv$; $\Gamma(R) = a^2vw$;
$\Gamma(S) = -b^2wu$;

La ecuación de cualquier otra circunferencia, en estas coordenadas, es de la forma
$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)(px + qy + rz) = 0$

donde p, q y r representan el valor de la potencia de cada vértice del triángulo de referencia respecto de ella.
Para las circunferencias del problema tendremos las siguientes ecuaciones:

Para la circunferencia que pasa por A, B y S:

$$\gamma_1 = (ABS): \qquad \Gamma(x,y,z) - \frac{b^2u}{u-w}(x+y+z)\cdot z = 0$$

Para la que pasa por C, D y S:

$$\gamma_2 = (CDS): \qquad \Gamma(x,y,z) - \frac{b^2w}{v(u-w)}(x+y+z)\cdot(-vx+uy) = 0$$

La que pasa por los puntos B, B' y C es:

$$\gamma = (BB'C): \qquad \Gamma(x,y,z) + \frac{b^2c^2x}{a^2-b^2+c^2}(x+y+z) = 0$$

Es inmediato ver que $\gamma_1(Q) = \text{Pot}\,(Q,\gamma_1) = \Gamma(Q) = \text{Pot}\,(Q,\gamma_2) = \gamma_2(Q) = c^2uv$.

Por tanto el eje radical de estas circunferencias es la recta QS o QR.
El otro punto que comparten estas circunferencias, lo determinaremos utilizando el eje radical.

El punto T es una de las soluciones del sistema (la otra es S):

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x}{u} - \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0 \\ \Gamma(x,y,z) - \frac{b^2u}{u-w}(x+y+z)\cdot z \end{array}\right\}$$

Con ayuda del programa *Derive* se hace menos penosa la resolución de este sistema que nos proporciona las coordenadas de $T(x{:}\,y{:}\,z)$

$$x = uw[a^2v(u-w) - b^2u(v+w)]$$

$$y = v[a^2vw(u-w) - b^2uw(v+w) - c^2uv(u-w)]$$

$$z = c^2uvw(w-u).$$

Vamos a tratar de mejorar el aspecto de esta solución.

Como D es un punto de la circunferencia circunscrita se tiene $c^2uv = -w(a^2v + b^2u)$.
$a^2v(u-w) - b^2u(v+w) = -w(a^2v + b^2u) + uv(a^2 - b^2) = uv(a^2 - b^2 + c^2) \quad (*)$

Por tanto $x = u^2vw(a^2 - b^2 + c^2)$.

Con la segunda coordenada tenemos, usando $(*)$
$y = v[a^2vw(u-w) - b^2uw(v+w) - c^2uv(u-w)] =$
$vw[a^2v(u-w) - b^2u(v+w)] - c^2uv^2(u-w) = uv^2[w(a^2 - b^2 + c^2) - c^2(u-w)] =$
$= uv^2[w(a^2 - b^2) + c^2(2w - u)]$

Con todo esto podemos poner finalmente

$T = (uw(a^2 - b^2 + c^2){:}\, v[w(a^2 - b^2) + c^2(2w - u)]{:}\, c^2w(w - u))$.

Para concluir debemos probar que este punto está en la circunferencia que determinan B, B' y C. En lugar de sustituir en esta circunferencia, lo que hacemos es hallar el centro radical de las tres circunferencias en cuestión: la intersección del eje radical de las dos primeras, QR, con el eje radical de γ y γ_1. Se trata de resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x}{u} - \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0 \\ \frac{c^2x}{a^2-b^2+c^2} + \frac{uz}{u-w} = 0 \end{array}\right\}$$

y encontramos como solución el mismo punto de antes

$T = (uw(a^2 - b^2 + c^2){:}\, v[w(a^2 - b^2) + c^2(2w - u)]{:}\, c^2w(w - u))$.
Esto demuestra la segunda parte del problema.

La expresión de T todavía puede mejorarse. Si en la segunda coordenada usamos $c^2uv = -w(a^2v + b^2u)$ la podremos poner como $vw(a^2 - b^2 + 2c^2) + w(a^2v + b^2u)$.
Con esto tendremos finalmente

$$\boxed{T = \{u(a^2 - b^2 + c^2){:}\, v(2a^2 - b^2 + 2c^2) + b^2u : c^2(w - u)\}}$$

Si se toma $D = A$, su homólogo es $T = A''$ (segundo punto de intersección de $B'A$ con γ), de coordenadas $A'' = (a^2 - b^2 + c^2{:}\, b^2{:} -c^2)$.

A cada punto D de la circunscrita hacemos corresponder un punto T de la circunferencia γ por el procedimiento descrito en el problema. Y recíprocamente, a cada punto T de γ le hacemos corresponder un único punto D de (Γ) de la siguiente manera en dos acciones:

1. Se traza $B'T$ y se determina su polo P respecto de (Γ)

2. Se proyecta P desde B sobre (Γ) en D.∎