Pr. Cabri 795

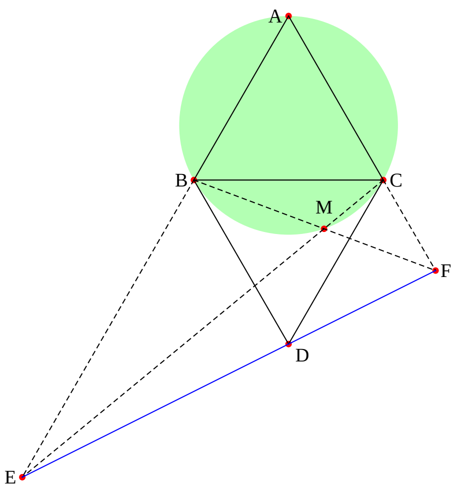
■ Enunciado

Se dan dos triángulos equiláteros ABC y DBC, que tienen en común el lado BC. Por el punto D se traza una secante variable que corta a la prolongación del lado AB en E y a la del lado AC en F (leve modificación del original, en el que F ha de estar situado entre A y C).
Hallar el lugar geométrico del punto de encuentro M de las rectas BF y CE.

Puig Adam (1986): Curso de Geometría métrica. Tomo II (p. 324).

■ Solución
por César Beade Franco

Out[217]=



Tomemos como vértices de los triángulos los puntos A$(0,\sqrt{3})$, B$(-1,0)$, C$(1,0)$ y D$(0,-\sqrt{3})$.
Trazamos por D una recta de pendiente m cuya ecuación será $y=m(x+\sqrt{3})$.
Intersecándola con los lados AB y AC obtenemos los puntos E$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-m}, -\frac{3+\sqrt{3}\,m}{\sqrt{3}-m}\right)$ y F$\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+m}, -\frac{3-\sqrt{3}\,m}{\sqrt{3}+m}\right)$.
El corte de la líneas CE y EF da el punto M$\left(\frac{4\sqrt{3}\,m}{9+m^2}, \frac{\sqrt{3}\,(-3+m^2)}{9+m^2}\right)$ que podemos considerar como las ecuaciones paramétricas del lugar buscado.
Eliminando el parámetro m se llega $x^2+y^2-\frac{2y}{\sqrt{3}}-1=0$, ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Si los vértices anteriores son tales que ABDC es un paralelogramo, entonces el lugar geométrico es la ex-elipse de Steiner del triángulo ABC.

Out[252]=