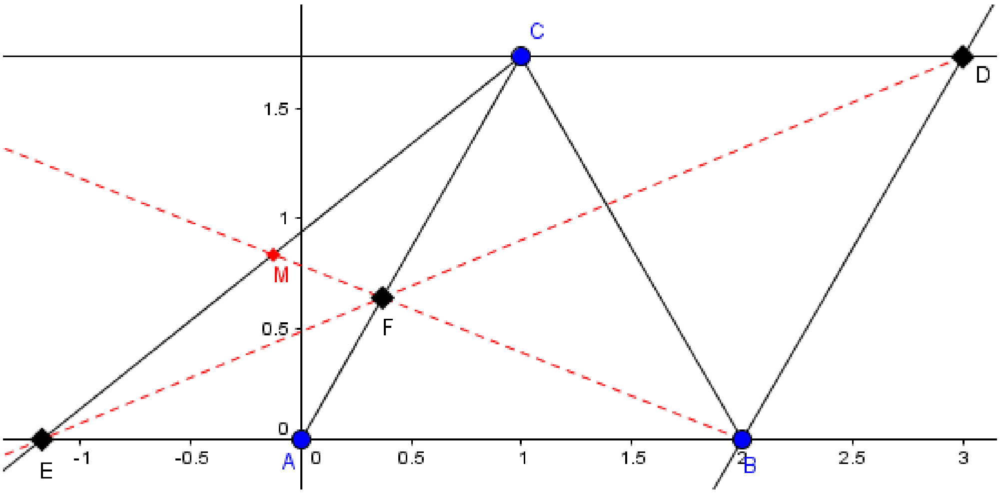
▪ Problema 795. -

Se dan dos triángulos equiláteros ABC y DBC, que tienen en común el lado BC.
Por el punto D se traza una secante variable que corta a la prolongación del lado AB en E
y a la del lado AC en F (leve modificación del original, en el que F ha de estar situado entre A y C).
Hallar el lugar geométrico del punto de encuentro M de las rectas BF y CE.

Puig Adam (1986) : Curso de Geometría métrica.Tomo II (p.324)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor de Matemáticas del IES Blas Infante, de Córdoba.

Resolveremos esta situación con el lenguaje de coordenadas.
Para ello, sea el triángulo equilátero ABC de lado l=2, y de vértices $A = \{0, 0\}$, $B = \{2, 0\}$, $C = \{1, \sqrt{3}\}$



Sea el punto variable F sobre la recta AC; $F = \left\{t, \sqrt{3}\, t\right\}$,

$t \in \mathbb{R}$. Observamos que $(t \neq 1)$ ya que entonces F = C y la recta DC sería paralela al lado AB.

El punto variable E, intersección del lado AB y la recta DF $\rightarrow \left\{y = 0\ ;\ \left(\sqrt{3} - \sqrt{3}\, t\right)(x - t) - (3 - t)\left(y - \sqrt{3}\, t\right) = 0\right\}$

tendrá de coordenadas $E = \left\{\dfrac{2\,t}{-1 + t}, 0\right\}$. Observamos que $t \neq 1$.

Hallamos la ecuación de la recta CE $\rightarrow$ $\left(\sqrt{3}\right)(x - 1) + \left(\frac{2\,t}{-1+t} - 1\right)\left(y - \sqrt{3}\right) = 0$

Port fin, M, punto de intersección de las rectas CE y BF, tendrá de coordenadas $M = \left\{\frac{2\,t^2 - t}{1 - t + t^2}, \frac{\sqrt{3}\,t}{1 - t + t^2}\right\}$

Eliminando el parámetro t, de las coordenadas paramétricas del punto M, obtenemos que $t \rightarrow \frac{\sqrt{3}\,x + y}{2\,y}$.

Sustituyendo, por fin, el parámetro $t \rightarrow \frac{\sqrt{3}\,x + y}{2\,y}$ en alguna de las ecuaciones de x ó y,

obtenemos la ecuación del Lugar Geométrico de los puntos M, cuando F varía sobre el lado AC.

M verifica el Lugar Geométrico, de ecuación $y = \frac{2\,y\left(\sqrt{3}\,x + y\right)}{\sqrt{3}\,(x^2 + y^2)}$. Simplicando dicha ecuación, obtenemos

$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

Dicha ecuación se corresponde con la circunferencia de centro, el punto O = $\{1, \frac{\sqrt{3}}{3}\}$ y de Radio R=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Esta circunferencia, no es otra que la circunscrita al triángulo equilátero ABC.