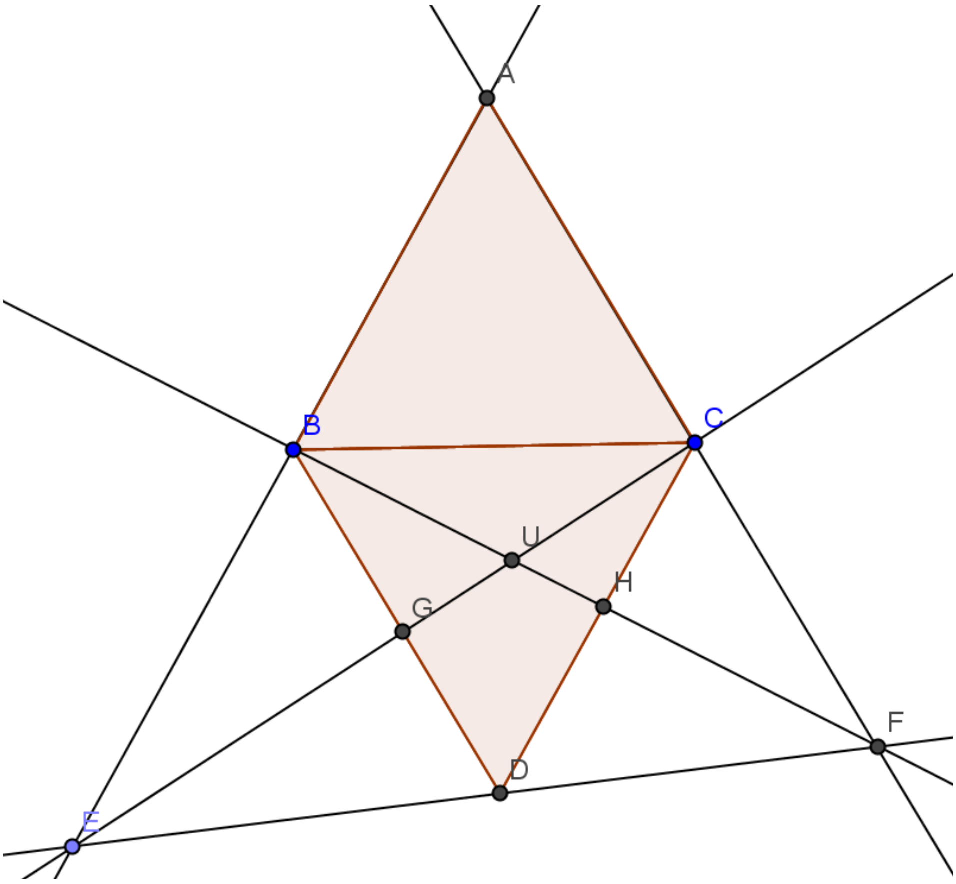
Problema 795

11.- Se dan dos triángulos equiláteros ABC y DBC, que tienen en común el lado BC. Por el punto D se traza una secante variable que corta a la prolongación del lado AB en E y a la del lado AC en F (leve modificación del original, en el que F ha de estar situado entre A y C).

Hallar el lugar geométrico del punto de encuentro M de las rectas BF y CE.

Puig Adam (1986): Curso de Geometría métrica. Tomo II (p. 324)

Solución del director:



Sean a el lado del triángulo ABC y s=BE.

Calculemos EC:

$EC^2=(a+s)^2+a^2-(a+s)a=a^2+as+s^2$, $EC=\sqrt{a^2+\text{as}+s^2}$

Al ser los triángulos EGB y ECA semejantes, es:

$$\frac{EG}{EB}=\frac{EC}{EA}\to EG=\frac{s}{s+a}\sqrt{a^2+\text{as}+s^2}, y\ GC=\frac{a}{s+a}\sqrt{a^2+\text{as}+s^2}$$

Además , $\frac{BG}{EB}=\frac{AC}{EA}\to BG=\frac{as}{s+a}$

Estudiemos ahora CF.

Los triángulos EBD y CDF son semejantes, por lo que:

$\frac{CF}{BD} = \frac{CD}{BE} \to CF = \frac{a^2}{s}$

De esta manera, tenemos:

$FB^2 = a^2 + (a + \frac{a^2}{s})^2 - a\left(a + \frac{a^2}{s}\right) \to FB = \frac{a}{s}\sqrt{a^2 + \text{as} + s^2}$

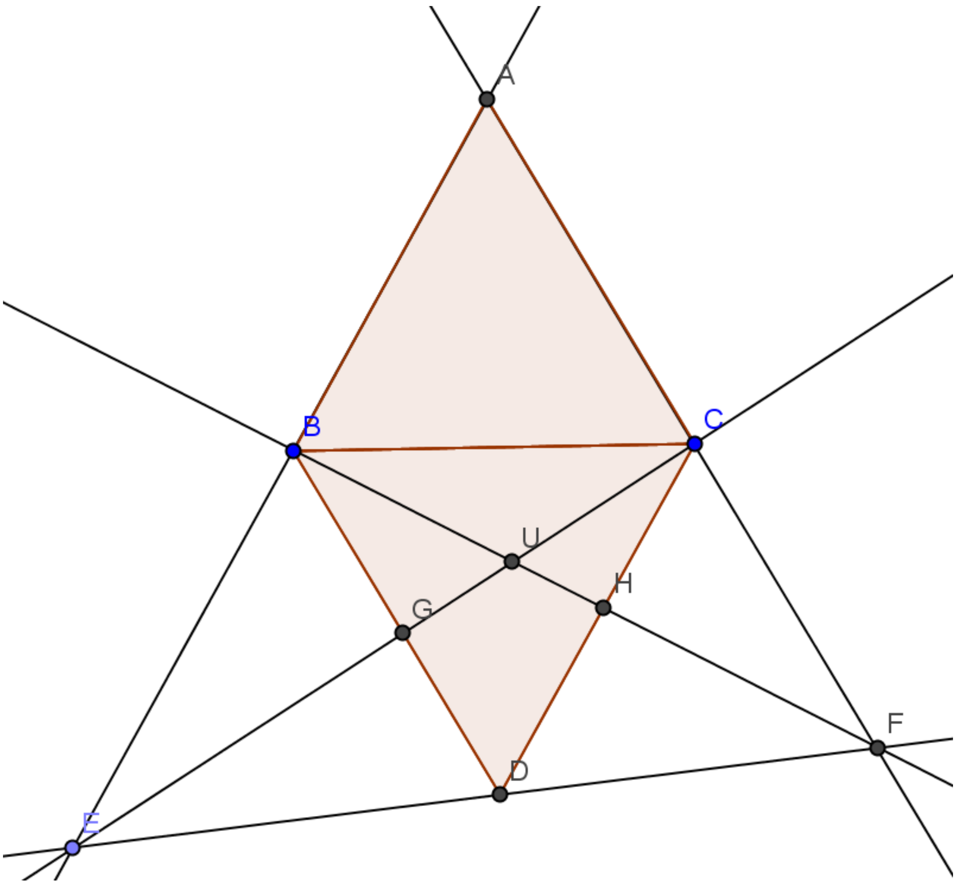
Los triángulos BUG y FUC son semejantes, por lo que

$$\frac{BU}{UF} = \frac{UG}{UC} = \frac{BG}{CF}$$

De donde considerando GU=GC m, UC= GC (1-m), BU= BF n, UF= BF (1-n), se tiene que:

$$\frac{n}{1-n} = \frac{m}{1-m} = \frac{\frac{as}{s+a}}{\frac{a^2}{s}} = \frac{s^2}{a(s+a)}.$$

Y por ello, n=m=$\frac{s^2}{a^2+\text{as}+s^2}$



Consideremos el triángulo BGU.

Es $BG = \frac{as}{s+a}$, $BU = \frac{s^2}{a^2+\text{as}+s^2}\frac{a}{s}\sqrt{a^2 + \text{as} + s^2}$, $GU = \frac{s^2}{a^2+\text{as}+s^2}\frac{a}{s+a}\sqrt{a^2 + \text{as} + s^2}$

Podemos reducir los lados que tienen el factor común as, y podemos simplificar las raíces para los cálculos, teniendo para cálculos, los siguientes valores, que forman un triángulo semejante al BGU.:

$$\frac{1}{a+s}, \frac{1}{\sqrt{a^2 + \text{as} + s^2}}, \frac{s}{(s+a)\sqrt{a^2 + \text{as} + s^2}}$$

El coseno del ángulo en U es:

$$\cos U = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \text{as} + s^2}}\right)^2 + \left(\frac{s}{(s+a)\sqrt{a^2 + \text{as} + s^2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{a+s}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \text{as} + s^2}}\right)\left(\frac{s}{(s+a)\sqrt{a^2 + \text{as} + s^2}}\right)}$$

Simplificando la expresión se tiene que cosU=1/2y por ello U=60º.

Asi $\angle BUC = 120º$

Y por tanto, el lugar pedido es la circunferencia circunscrita a ABC.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla.

España