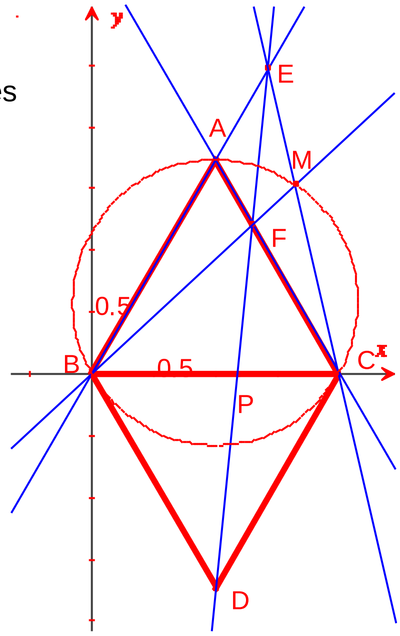
Problema 795

Siguen dos triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{DBC}$ que tenen un costat comú $\overline{BC}$.
Pel punt D es traça una secant variable que talla la prolongació del costat $\overline{AB}$ en E i la del costat $\overline{AC}$ en F.
Determineu el lloc geomètric del punt intersecció M de les rectes BF i CE.

Solució:



Considerem els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{DBC}$ amb les següents coordenades cartesianes.
$B(0,0)$, $C(2,0)$, $A\left(1,\sqrt{3}\right)$, $D\left(1,-\sqrt{3}\right)$.

El circumcentre O del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ té les coordenades: $O\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Siga $P(a,0)$ un punt qualsevol de la recta BC.
Siga E la intersecció de les rectes DP i AB. Siga F la intersecció de les rectes DP i AC.
La recta AB té equació: $r_{AB} \equiv y = \sqrt{3}\,x$.
La recta AC té equació: $r_{AC} \equiv y = -\sqrt{3}\,(x-2)$.
La recta DP té equació:
$r_{DP} \equiv y = \dfrac{\sqrt{3}}{a-1}(x-a)$.
Efectuant la intersecció de les rectes DP i AB, les coordenades de E són:
$E\left(\dfrac{-a}{a-2},\dfrac{-\sqrt{3}a}{a-2}\right)$.
Efectuant la intersecció de les rectes DP i AC, les coordenades de F són:
$F\left(\dfrac{3a-2}{a},\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{a}\right)$.

L'equació de la recta CE és: $r_{CE} \equiv y = \dfrac{\sqrt{3}a}{3a-4}(x-2)$.

L'equació de la recta BF és: $r_{BF} \equiv y = -\dfrac{\sqrt{3}a}{3a-2}(x-2)$.
Efectuant la intersecció de les rectes CE i BF, les coordenades de M són:
$M\left(\dfrac{3a^2-2a}{3a^2-6a+4},-\dfrac{\sqrt{3}a^2-2\sqrt{3}a}{3a^2-6a+4}\right)$.

Comprovem que $\overline{OM} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\left(\frac{3a^2-2a}{3a^2-6a+4}-1\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}a^2-2\sqrt{3}a}{3a^2-6a+4}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{16(a-1)^2}{\left(3a^2-6a+4\right)^2}+\frac{4\left(3a^2-6a+2\right)^2}{3\left(3a^2-6a+4\right)^2}=\frac{4}{3}.$$

Aleshores M pertany a la circumferència circumscrita del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.