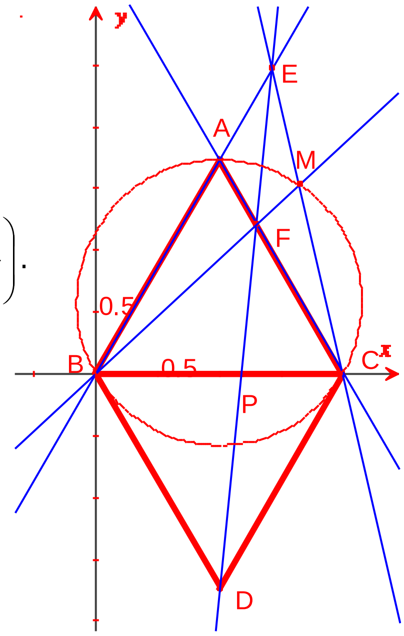
Problema 795

Sean dos triángulos equiláteros $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{DBC}$ que tienen un lado común $\overline{BC}$.

Por el punto D se traza una secante variable que corta la prolongación del lado $\overline{AB}$ en E y la del lado $\overline{AC}$ en F.

Determinar el lugar geométrico del punto intersección M de las rectas BF i CE.

Solución de Ricard Peiró:



Consideremos los triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{DBC}$ con las siguientes coordenadas cartesianas.

$B(0,0)$, $C(2,0)$, $A\left(1,\sqrt{3}\right)$, $D\left(1,-\sqrt{3}\right)$.

El circuncentro O del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tiene las coordenadas: $O\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Sea $P(a,0)$ un punto cualquiera de la recta BC.

Sea E la intersección de las rectas DP y AB. Sea F la intersección de les rectas DP y AC.

La recta AB tiene ecuación: $r_{AB} \equiv y=\sqrt{3}\,x$.

La recta AC tiene ecuación: $r_{AC} \equiv y=-\sqrt{3}\,(x-2)$.

La recta DP tiene ecuación:

$$r_{DP} \equiv y=\frac{\sqrt{3}}{a-1}(x-a).$$

Efectuando la intersección de las rectas DP y AB, les coordenadas de E son:

$$E\left(\frac{-a}{a-2},\frac{-\sqrt{3}a}{a-2}\right).$$

Efectuando la intersección de les rectas DP y AC, les coordenadas de F son:

$$F\left(\frac{3a-2}{a},\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{a}\right).$$

La ecuación de la recta CE es: $r_{CE} \equiv y=\dfrac{\sqrt{3}a}{3a-4}(x-2)$.

La ecuación de la recta BF es: $r_{BF} \equiv y=-\dfrac{\sqrt{3}a}{3a-2}(x-2)$.

Efectuando la intersección de las rectas CE y BF, las coordenadas de M son:

$$M\left(\frac{3a^2-2a}{3a^2-6a+4},-\frac{\sqrt{3}a^2-2\sqrt{3}a}{3a^2-6a+4}\right).$$

Comprobemos que $\overline{OM}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\left(\frac{3a^2-2a}{3a^2-6a+4}-1\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}a^2-2\sqrt{3}a}{3a^2-6a+4}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{16(a-1)^2}{\left(3a^2-6a+4\right)^2}+\frac{4\left(3a^2-6a+2\right)^2}{3\left(3a^2-6a+4\right)^2}=\frac{4}{3}.$$

Entonces M pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.