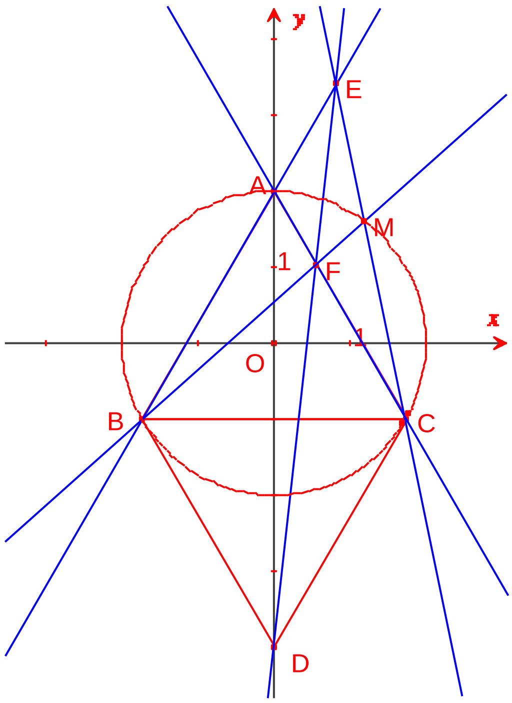
Problema 795

Sean dos triángulos equiláteros $A\overset{\Delta}{B}C$ y $D\overset{\Delta}{B}C$ que tienen un lado común $\overline{BC}$.

Por el punto D se traza una secante variable que corta la prolongación del lado $\overline{AB}$ en E y la del lado $\overline{AC}$ en F.

Determinar el lugar geométrico del punto intersección M de las rectas BF i CE.

Solución con Cabri



Solución con MuPaD:

Sean O(0, 0) circuncentro del triángulo ABC
A(0, 2), B(-sqrt(3), -1), C(sqrt(3), -1), D(0, -4) P(a, -1)

La recta AB

- `rab:=y-2=sqrt(3)*x`

La recta AC

- `rac:=y-2=-sqrt(3)*x`

La recta DP

- `rdp:=y+4=3/a*x`

El punto E

- `solve({rdp,rab},{x,y})`

$$\begin{cases} \left\{\left[x = -\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot a}{a-\sqrt{3}},\ y = -\frac{4\cdot a+2\cdot\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}\right]\right\} & \text{if } \neg a \in \{\sqrt{3}\} \\ \emptyset & \text{if } a \in \{\sqrt{3}\} \end{cases}$$

El punto F

- `solve({rdp,rac},{x,y})`

$$\begin{cases} \left\{\left[x = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot a}{a+\sqrt{3}},\ y = \frac{2\cdot\sqrt{3}-4\cdot a}{a+\sqrt{3}}\right]\right\} & \text{if } \neg a \in \{-\sqrt{3}\} \\ \emptyset & \text{if } a \in \{-\sqrt{3}\} \end{cases}$$

La recta BF

- `rbf:=y+1=(-a+sqrt(3))/(sqrt(3)*a+1)*(x+sqrt(3))`

$$y+1 = -\frac{(x+\sqrt{3})\cdot(a-\sqrt{3})}{\sqrt{3}\cdot a+1}$$

La recta CE

- `rce:=y+1=(a+sqrt(3))/(sqrt(3)*a-1)*(x-sqrt(3))`

$$y+1 = \frac{(a+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})}{\sqrt{3}\cdot a-1}$$

El punto M

- `solve({rce,rbf},{x,y})`

$$\begin{cases} \left\{\left[x = \frac{4\cdot a}{a^2+1},\ y = -\frac{2\cdot a^2-2}{a^2+1}\right]\right\} & \text{if } a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\cdot i, i, -\sqrt{3}\} \\ \{[x = -\sqrt{3},\ y = -1]\} & \text{if } a \in \{-\sqrt{3}\} \end{cases}$$

Calculemos OM

- `sqrt((-4*a/(a^2+1))^2+(-(2*a^2-2)/(a^2+1))^2)`

$$\sqrt{\frac{(2\cdot a^2-2)^2}{(a^2+1)^2}+\frac{16\cdot a^2}{(a^2+1)^2}}$$

- `simplify(%)`

$$2$$

M pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC

-