Quincena del 1 al 15 de diciembre de 2016.

Problema 795

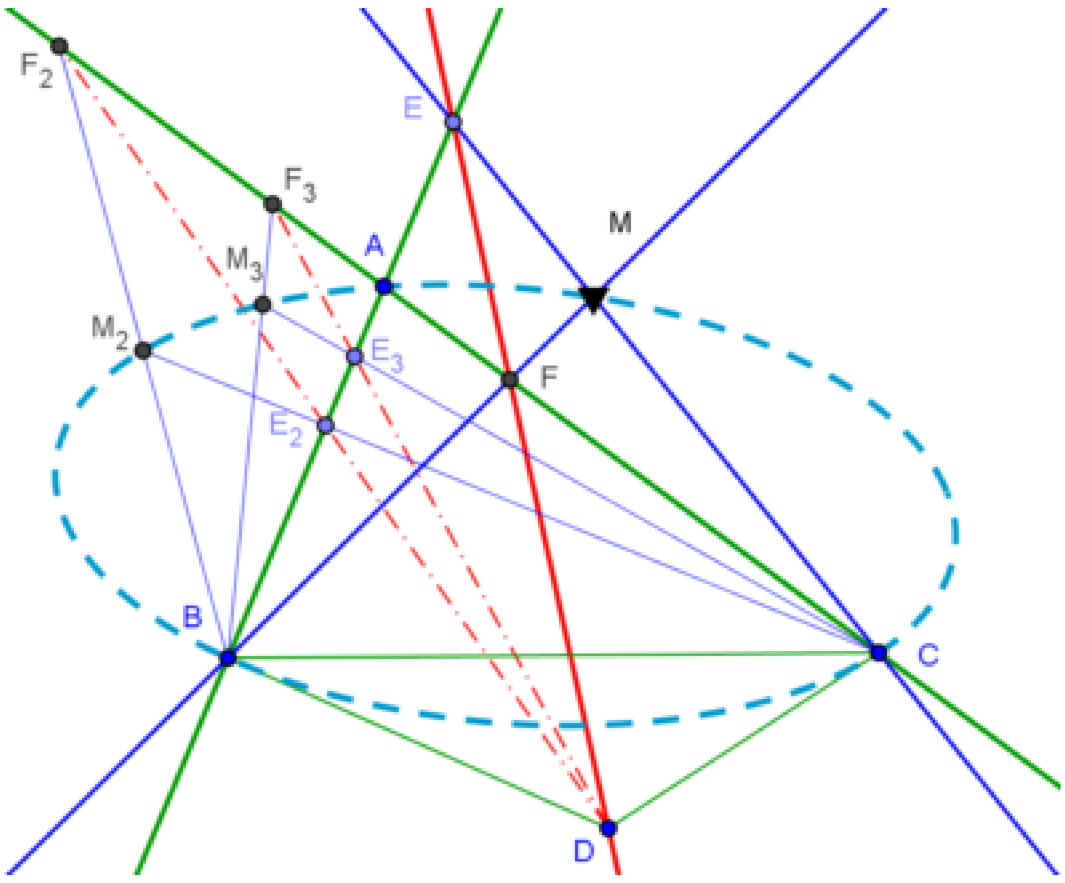
11.- *Se dan dos triángulos equiláteros ABC y DBC, que tienen en común el lado BC. Por el punto D se traza una secante variable que corta a la prolongación del lado AB en E y a la del lado AC en F (leve modificación del original, en el que F ha de estar situado entre A y C).*

Hallar el lugar geométrico del punto de encuentro M de las rectas BF y CE.

Puig Adam (1986): Curso de Geométrica métrica. Tomo II (p. 324)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Consideremos dos recta e y f que se cortan en un punto A. Sea D un punto del plano no situado en ninguna de esas rectas. Sean B y C dos puntos situados sobre las rectas e y f respectivamente.

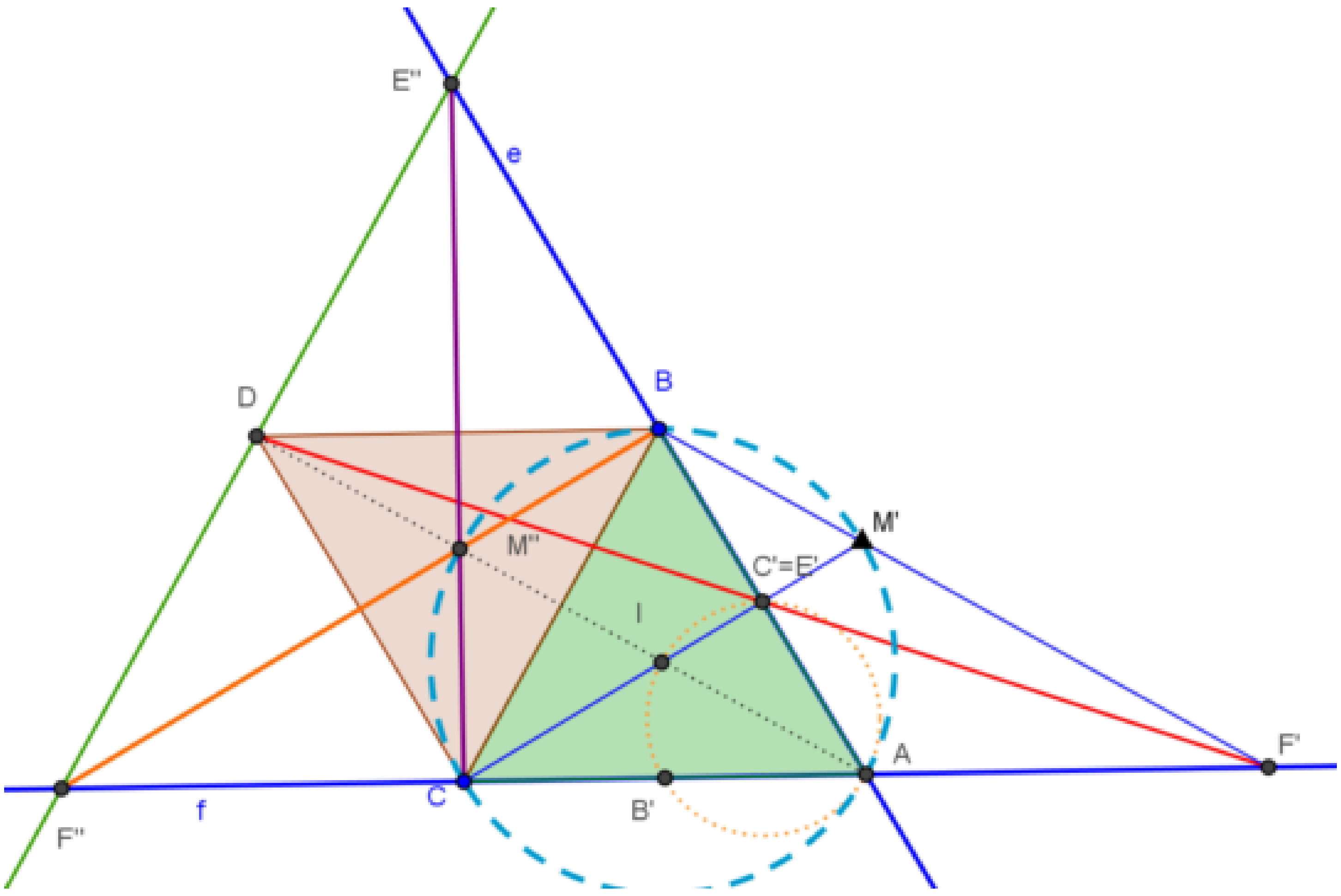


Dada una recta b del haz de las que pasan por B, encuentra en F a la recta $f = AC$. Este punto F se proyecta por D sobre la recta $e = AB$ en el punto E. A la recta $b = BF$ le hacemos corresponder la recta $c = CE$. Si se parte de $c = CE$, de igual manera le asociamos la recta $b = BF$.

Esta correspondencia es una proyectividad entre las rectas e y f. Los puntos de intersección definen una cónica. Un punto de esta cónica es A y también los centros de los haces B y C que sirven para definirla. Sólo falta pues demostrar que cuando ABC y DBC son triángulos equiláteros, esta cónica es una circunferencia: la circunferencia circunscrita a ABC.
Para ello vamos a construir dos nuevos puntos del lugar y demostrar que yacen sobre la circunferencia circunscrita.

Tomo F' igual al simétrico de C respecto de A. Sean B', C' los puntos medios de los lados AC y AB respectivamente e I el centro de ABC. Los triángulos DBC' y $F'AC'$ son congruentes pues, por construcción, $\sphericalangle DBC' = 120° = \sphericalangle C'AF; DB = AF'$ y $BC' = C'A$. Por tanto $\sphericalangle DC'B$ y $\sphericalangle AC'F$. C' es el punto medio del segmento DF'.

Lo que acabamos de ver es que $E' = C'$, el punto medio de AB y F' el simétrico de C por A, se corresponden en la proyectividad que hemos definido. Sea $M' = CI \cap BF'$ el punto que definen. El triángulo ABF' es isósceles, por tanto $\sphericalangle CBF' = 90°$. Como CI es un diámetro de la circunferencia (ABC), necesariamente M' está en ella.



Vamos por el último punto.

Dado E'' sobre AB tal que B sea el punto medio de AE'', construyo a partir de ahí el triángulo equilátero $AE''F''$. Como I es el centro de ABC, el centro de este nuevo triángulo es el punto M'' de intersección de las rectas BF'' y CE'' (alturas del mismo), que se corresponden en la proyectividad definida antes (obsérvese que D está sobre el lado $E''F''$: es el punto medio de ese lado). Como $AC'IB'$ es cíclico, una homotecia de centro A y razón 2 lo transforma en el cuadrilátero, también cíclico, $ABM''C$ inscrito en la circunferencia circunscrita a ABC.

■