Dados un triángulo ABC, un punto U y una cónica inscrita (C). Las otras tangentes desde los vértices del triángulo ceviano DEF de U cortan a las rectas EF, FD y DE en puntos alineados.

SOLUCIÓN:

Un caso particular es el problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **796**.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

Se da un triángulo ABC circunscrito a un círculo O; luego se forma un segundo triángulo abc, cuyos vértices a,b y c son los puntos medios de los lados BC, CA y AB del primero ; por los vértices a, b y c de este segundo triángulo se trazan las tangentes al círculo que encuentran a los lados opuestos bc, ca y ab respectivamente en los puntos m, n y p. Demostrar que estos puntos están en línea recta.

Puig Adam, P. (1986): Curso de Geometría métrica.(p. 324. Ejercicio nº 12. Examen de ingreso a Ingenieros Navales. 1945-1947)

En coordenadas baricéntricas, la ecuación de la cónica inscrita a ABC de perspector $P(p : q : r)$ es:

$$(C): \quad \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+\frac{z^2}{r^2}-\frac{2\,yz}{qr}-\frac{2xz}{pr}-\frac{2xy}{pq}=0.$$

Los vértices del triángulo ceviano de U son:

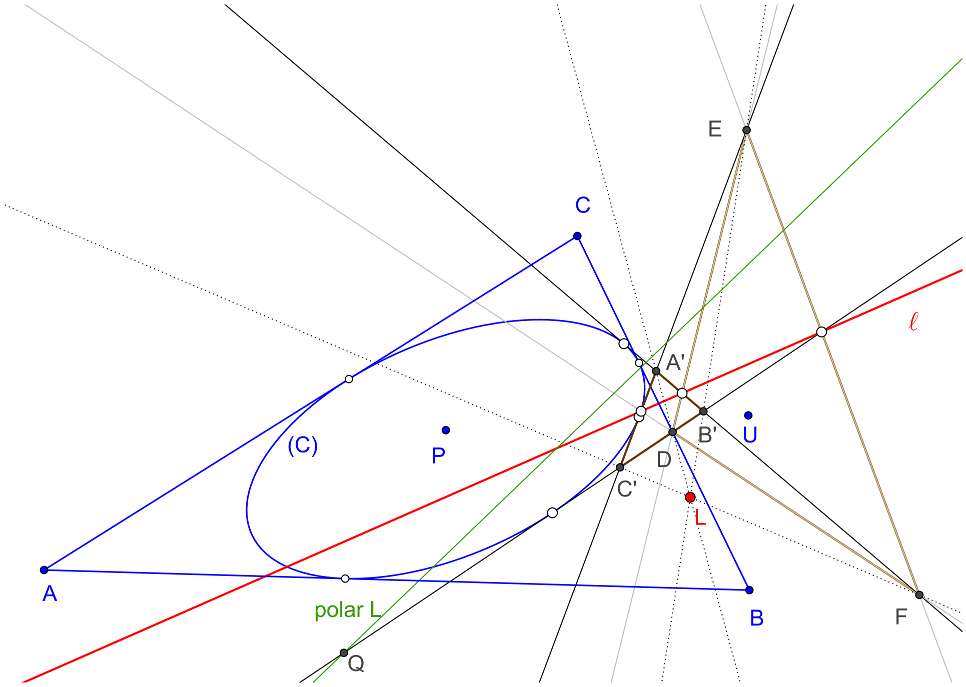
$$D(0 : v : w), \qquad E(u : 0 : w), \qquad F(u : v : 0).$$

Las tangentes desde D, E, F a la cónica (C), distintas de los lados de ABC, son:

$$\begin{aligned}
&-qrvwx+(prvw-pqw^2)y+(-prv^2+pqvw)z=0,\\
&(qruw-pqw^2)x-pruwy+(-qru^2+pquw)z=0,\\
&(qruv-prv^2)x+(-qru^2+pruv)y-pquvz=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Estas tangentes forma un triángulo $A'B'C'$ y cortan a las rectas EF, FD, DE, respectivamente, en puntos sobre la recta ℓ:

$$\begin{aligned}
&vw(p^2r^2v^2+2pqrv(ru-pw)+q^2(-3r^2u^2+2pruw+p^2w^2))x+\\
&uw(-3p^2r^2v^2+q^2(ru-pw)^2+2pqrv(ru+pw))y+\\
&uv(p^2r^2v^2+2pqrv(-ru+pw)+q^2(r^2u^2+2pruw-3p^2w^2))z=0
\end{aligned}\tag{2}$$



Por el Teorema de Desargues, los triángulos DEF y $A'B'C'$ son perspectivos y el centro de perspectividad es:

$$L(qru^2 : prv^2 : pqw^2).$$

La recta ℓ y la polar de L, respecto a la cónica (C), se cortan en:

$$Q(pu(-qru + prv + pqw)(-rv + qw) : qv(ru - pw)(qru - prv + pqw) : -rw(qu - pv)(qru + prv - pqw)).$$

En particular, si U es el baricentro y (C) es la circunferencia inscrita, de perspector el punto de Gergonne, $((a+b-c)(a-b+c) : \cdots : \cdots)$, ℓ es el **eje radical** de las circunferencias inscritas a ABC y a su triángulo medial $M_aM_bM_c$ (circunferencia de Spieker):

$$(7a^2 - 10a(b+c) - b^2 + 14bc - c^2)x + \cdots = 0,$$

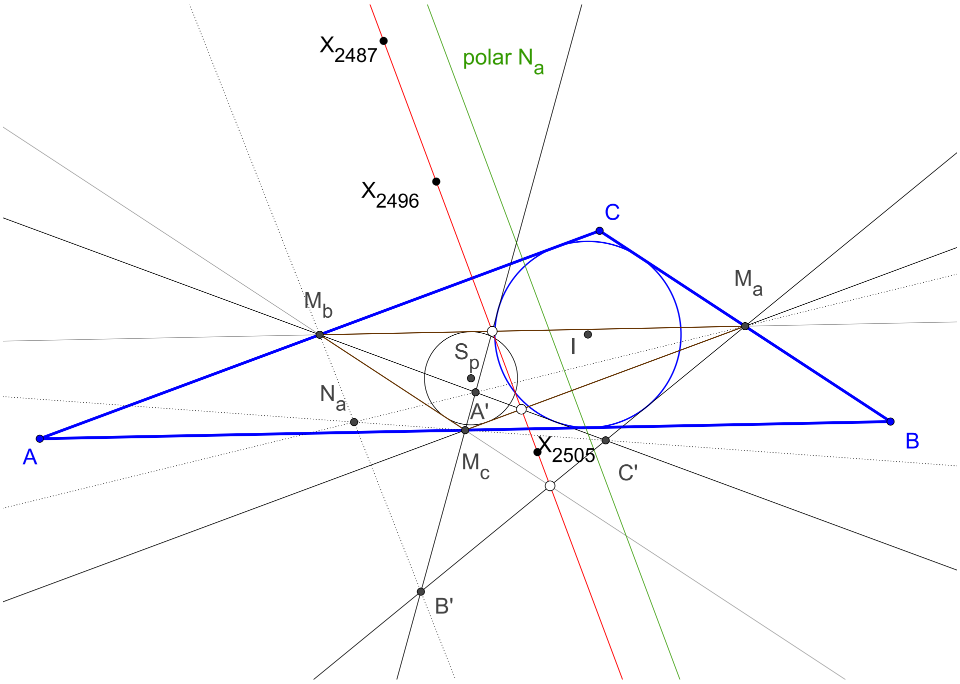
que pasa por los centros del triángulo $X_{2487}, X_{2496}, X_{2505}, X_{3667}$, este último su punto en el infinito.

X_{2487} es el centro radical de las circunferencias inscrita, de Spieker y de Bevan (circunferencia circunscrita al triángulo excentral).

X_{2496} es el centro radical de las circunferencias circunscrita, inscrita y de Spieker.

X_{2505} es el centro radical de las circunferencias inscrita, de Spieker y de Feuerbach.

El centro de perspectividad L de $M_aM_bM_c$ y $A'B'C'$ es el punto de Nagel y su polar respecto a la circunferencia inscrita es paralela a ℓ.



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2548.pdf