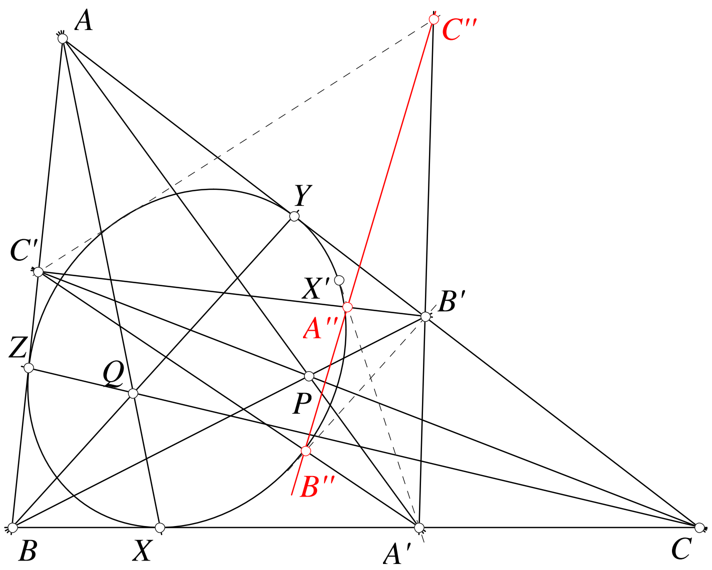
Problema 796 de *triánguloscabri*. 12. *Se da un triángulo ABC circunscrito a un círculo I; luego se forma un segundo triángulo $A'B'C'$, cuyos vértices A', B', C' son los puntos medios de los lados BC, CA y AB del primero; por los vértices A', B', C' de este segundo triángulo se trazan las tangentes al círculo que encuentran a los lados opuestos $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$ respectivamente en los puntos A'', B'' y C''. Demostrar que estos puntos están en línea recta.*

Puig Adam (1986): Curso de Geometría Métrica. Tomo II (p. 324).

Solución de Francisco Javier García Capitán. Vamos a relajar las hipótesis del problema y suponer que $A'B'C'$ es el triángulo ceviano de un punto P. En el problema propuesto tenemos que P es el baricentro G del triángulo. También vamos a considerar en lugar de la circunferencia inscrita al triángulo ABC, cualquier cónica inscrita, con perspector Q. En el problema propuesto, Q es el punto de Gergonne del triángulo ABC.



Si $Q = (p : q : r)$, entonces $X = (0 : q : r)$, $Y = (p : q : r)$, $Z = (p : q : 0)$, y la cónica inscrita con perspector Q tiene ecuación

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} - \frac{2yz}{qr} - \frac{2zx}{rp} - \frac{2xy}{pq} = 0.$$

Si $P = (u : v : w)$, la recta AP corta a BC en $A' = (0 : v : w)$ y la polar de A' respecto de la cónica es la recta

$$-qr(rv + qw)x + pr(rv - qw)y + pq(-rv + qw)z = 0,$$

que corta a la cónica en el punto X y en el punto X', siendo

$$X' = \left(p(rv - qw)^2 : qr^2v^2 : q^2rw^2\right).$$

Entonces, la recta $A'X'$ de ecuación

$$qrvwx + pw(qw - rv)y + pv(rv - qw)z = 0,$$

corta a la recta $B'C'$ en el punto

$$A'' = (2pu(rv - qw) : v(qru + prv - pqw) : -w(qru - prv + pqw)) .$$

De igual forma, obtenemos los puntos

$$B'' = (u(qru + prv - pqw) : 2qv(pw - ru) : w(-qru + prv + pqw)) ,$$

$$C'' = (u(qru - prv + pqw) : -v(-qru + prv + pqw) : 2rw(qu - pv)) .$$

Los puntos A'', B'', C'' están alineados si se cumple

$$\begin{vmatrix} 2prv - 2pqw & qru + prv - pqw & -qru + prv - pqw \\ -qru - prv + pqw & 2pqw - 2qru & -qru + prv + pqw \\ qru - prv + pqw & qru - prv - pqw & 2qru - 2prv \end{vmatrix} = 0,$$

lo cual es cierto, ya que las tres filas suman cero.