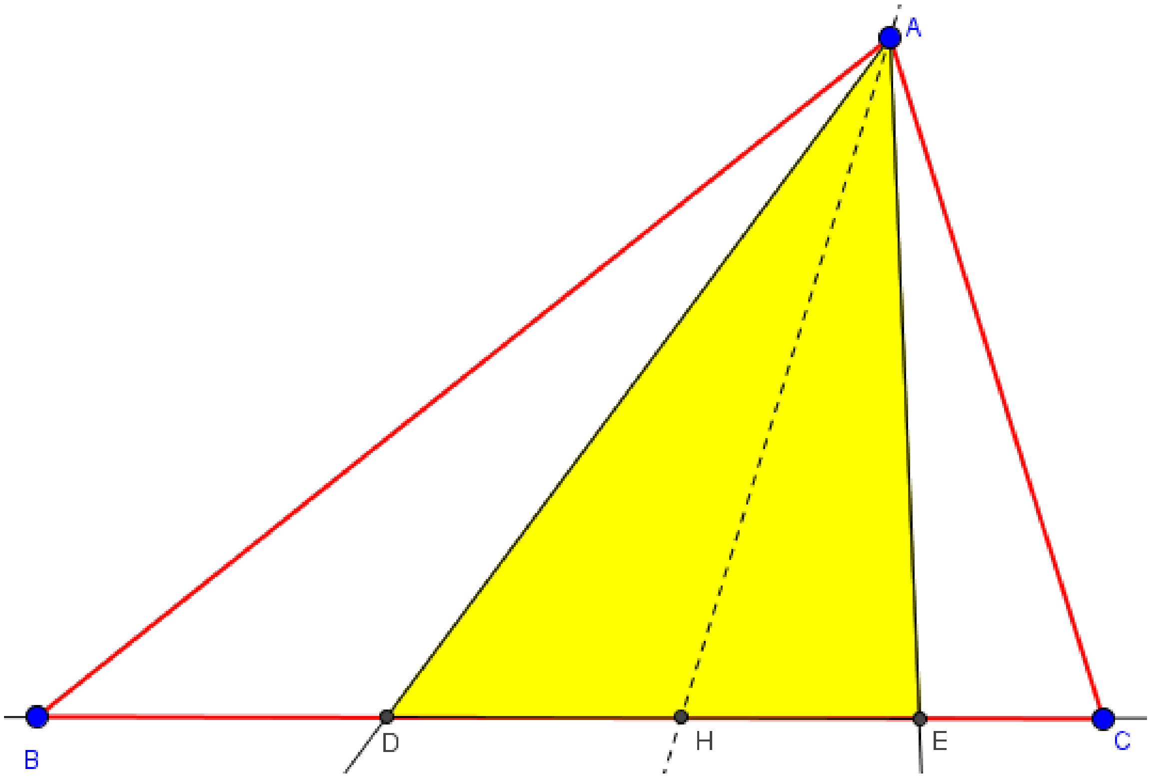
■ Problema 797. -

Construcción. Dado el el triángulo ABC, hallar dos puntos D, E sobre el segmento BC
tales que AD y AE sean rectas isogonales y el área de ADE sea la mitad del área de ABC.

García, F. J.(2016): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor de Matemáticas del IES Blas Infante, de Córdoba.



Con las notaciones habituales de la geometría del triángulo, sea v_a = AH la bisectriz del triángulo ABC.
Por tanto, $v_a^2 = b'c' - mn$, siendo los segmentos m=HD y n=HE, los segmentos donde las isogonales AD=c' y AE=b', cortan al lado BC del triángulo ABC.
Para que la construcción sea válida, deberá ocurrir que m+n=$\frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.
Por tanto, podemos expresar b' y c' en función de m' y n' del modo:

```
Solve[{va^2 == b' c' - m n, m b' == n c'}, {b', c'}]
```

$$\left\{b' \to \frac{\sqrt{n}\,\sqrt{m\,n + v_a^2}}{\sqrt{m}},\ c' \to \frac{\sqrt{m}\,\sqrt{m\,n + v_a^2}}{\sqrt{n}}\right\}$$

```
Solve[{va^2 == b' c' - m n, m b' == n c'}, {b', c'}] /. m → a/2 - n
```

$$\text{Como } m + n = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \to \left\{b' \to \frac{\sqrt{n}\,\sqrt{\left(\frac{a}{2} - n\right) n + v_a^2}}{\sqrt{\frac{a}{2} - n}},\ c' \to \frac{\sqrt{\frac{a}{2} - n}\,\sqrt{\left(\frac{a}{2} - n\right) n + v_a^2}}{\sqrt{n}}\right\}$$

Podemos ahora relacionar la isogonal AE=n con los lados iniciales del triángulo a,b y c.
Para ello, usando el Teorema de los cosenos en el triángulo AEC y teniendo en cuenta que HC=$\frac{a\,b}{b+c}$

$$\text{Solve}\left[\left(\frac{\sqrt{n}\ \sqrt{\left(\frac{a}{2}-n\right) n+v_a^2}}{\sqrt{\frac{a}{2}-n}}\right)^2 == \left(\frac{a\,b}{b+c}-n\right)^2+b^2-2\left(\frac{a\,b}{b+c}-n\right) b\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b}\right),\ n\right] \text{ // Simplify}$$

$$\Big\{\Big\{n\to -\Big(a^3 b^2-a b^4-2 a^3 b c-a^3 c^2+4 a b^2 c^2+4 a b c^3+a c^4+2 a b^2 v_a^2+4 a b c v_a^2+2 a c^2 v_a^2+\sqrt{a^2\left(8 b c\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-(b+c)^2\right)^2+\left(\left(b^2-2 b c-c^2\right)\left(a^2-(b+c)^2\right)+2 (b+c)^2 v_a^2\right)^2\right)}\Big)\Big/\left(4\left(b^2-c^2\right)\left(-a^2+(b+c)^2\right)\right)\Big\},$$

$$\Big\{n\to \Big(-a^3 b^2+a b^4+2 a^3 b c+a^3 c^2-4 a b^2 c^2-4 a b c^3-a c^4-2 a b^2 v_a^2-4 a b c v_a^2-2 a c^2 v_a^2+\sqrt{a^2\left(8 b c\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-(b+c)^2\right)^2+\left(\left(b^2-2 b c-c^2\right)\left(a^2-(b+c)^2\right)+2 (b+c)^2 v_a^2\right)^2\right)}\Big)\Big/\left(4\left(b^2-c^2\right)\left(-a^2+(b+c)^2\right)\right)\Big\}\Big\}$$

Expresión harto complicada de simplificar. No obstante, podemos realizar la construcción, no euclídea (sólo con regla y compás) de dicho problema.
Sea por ejemplo, el triángulo ABC con los datos numéricos siguientes:

$$\{a\to 2.8028227353936706,\ b\to 1.871626187370159,\ c\to 2.861331372047005,\ v_a\to 1.864741239231206\}$$

$$\Big\{\Big\{n\to -\Big(a^3 b^2-a b^4-2 a^3 b c-a^3 c^2+4 a b^2 c^2+4 a b c^3+a c^4+2 a b^2 v_a^2+4 a b c v_a^2+2 a c^2 v_a^2+\sqrt{a^2\left(8 b c\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-(b+c)^2\right)^2+\left(\left(b^2-2 b c-c^2\right)\left(a^2-(b+c)^2\right)+2 (b+c)^2 v_a^2\right)^2\right)}\Big)\Big/\left(4\left(b^2-c^2\right)\left(-a^2+(b+c)^2\right)\right)\Big\},$$

$$\Big\{n\to \Big(-a^3 b^2+a b^4+2 a^3 b c+a^3 c^2-4 a b^2 c^2-4 a b c^3-a c^4-2 a b^2 v_a^2-4 a b c v_a^2-2 a c^2 v_a^2+\sqrt{a^2\left(8 b c\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-(b+c)^2\right)^2+\left(\left(b^2-2 b c-c^2\right)\left(a^2-(b+c)^2\right)+2 (b+c)^2 v_a^2\right)^2\right)}\Big)\Big/\left(4\left(b^2-c^2\right)\left(-a^2+(b+c)^2\right)\right)\Big\}\Big\}\ /.\ \{a\to 2.8028227353936706,\ b\to 1.871626187370159,\ c\to 2.861331372047005,\ v_a\to 1.864741239231206\}$$

La solución numérica que proporciona el programa Mathemática sería la siguiente:

{{n → 7.1851832625358085}, {n → 0.6249887964387485}}