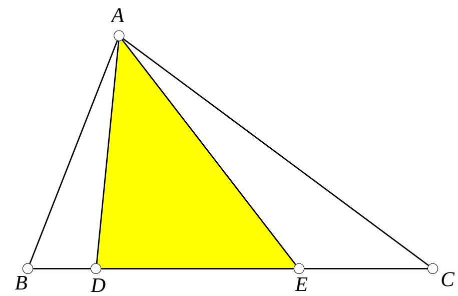
Problema 797. Construcción. Dado el triángulo $\triangle ABC$, hallar dos puntos D, E sobre el segmento BC tales que AD y AE sean rectas isogonales y el área de $\triangle ADE$ sea la mitad del área de $\triangle ABC$.

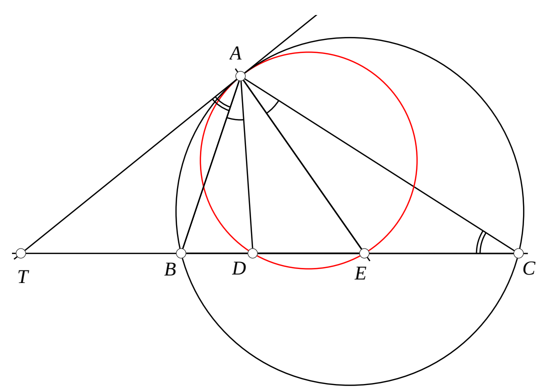


Francisco Javier García Capitán (2016), comunicación personal.

Solución de Ercole Suppa. Usaremos este lema:

Lema. Dado el el triángulo $\triangle ABC$, si D y E dos puntos sobre el segmento BC tales que AD y AE son rectas isogonales entonces los círculos $\odot(ABC)$ y $\odot(ADE)$ son tangentes entre sí en el punto A.

Demostración. Sea T el punto de intersección entre la recta BC y la tangente a $\odot(ABC)$ en A.



Está claro que

$$\widehat{DEA} = \widehat{ECA} + \widehat{CAE} = \widehat{TAB} + \widehat{BAD} = \widehat{TAD}$$

entonces la recta TA es tangente al circulo $\odot(ADE)$ en A y así el lema está demostrado. ■

Volviendo ahora al problema original, suponiendo que AD y AE son dos cevianas isogonales tales que el área de $\triangle ADE$ es la mitad del área de $\triangle ABC$

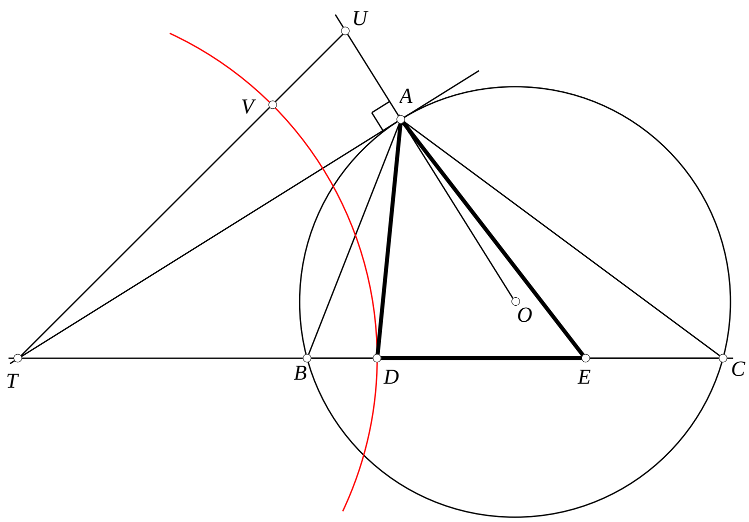
está claro que $DE = a/2$. Usando el lema podemos calcular la potencias del punto T respecto de la circunferencia $\odot(ADE)$ en este manera

$$TD \cdot TE = TA^2$$

de donde, poniendo $TA = m$ y $TD = x$, se sigue que

$$\begin{aligned} x \cdot \left(x + \frac{a}{2}\right) = m^2 \qquad &\Rightarrow \\ 2x^2 + ax - 2m^2 = 0 \qquad &\Rightarrow \\ x = -\frac{a}{4} + \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + m^2} & \end{aligned}$$

Entonces, dado el triángulo $\triangle ABC$ tenemos la siguiente construcción:



1. O es el circuncentro de $\triangle ABC$;
2. en la prolongación de la OA de la parte de A se toma el punto U tal que $AU = BC/4$;
3. en el segmento UT se toma el punto V de tal manera que $UV = BC/4$;
4. la circunferencia con centro T y radio TV corta al segmento BC en D;
5. la recta simétrica de AD respecto de la bisectriz interior de A corta a BC en E.

$\square$