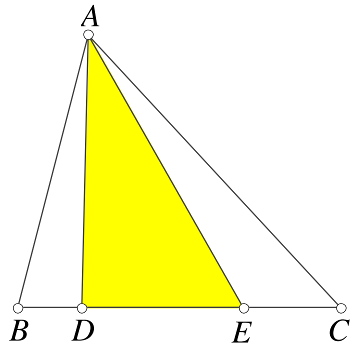
Problema 797 de *triánguloscabri*. Construcción. *Dado el el triángulo ABC, hallar dos puntos D, E sobre el segmento BC tales que AD y AE sean rectas isogonales y el área de ADE sea la mitad del área de ABC.*



Solución. Usamos coordenadas baricéntricas, por lo que manejaremos intensamente las distancias con signo.

Supongamos que D es la traza sobre BC de un punto $P = (x : y : z)$, y que E es la traza del conjugado isogonal de P, es decir del punto $(a^2yz : b^2zx : c^2xy)$. Por tanto, será $D = (0 : y : z)$ y $E = (0 : b^2z : c^2y)$. Usando la fórmula del área en coordenadas baricéntricas, buscamos que se cumpla

$$\frac{(ADE)}{(ABC)} = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{(y+z)(b^2z+c^2y)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & z \\ 0 & b^2z & c^2y \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2y^2 - b^2z^2}{(y+z)(b^2z+c^2y)} = \pm\frac{1}{2}.$$

que conducen a la relación $c^2y^2 - b^2yz - c^2yz - 3b^2z^2 = 0$ o a su simétrica $b^2z^2 - b^2yz - c^2yz - 3c^2y^2 = 0$.

Podemos resolver sólo una de las ecuaciones, ya que la otra dará soluciones simétricas (respecto del punto medio de B y C). Usaremos este lema:

Lema 1. *La ecuación de la circunferencia que pasa por A y por los puntos $(0 : y : z)$ de la recta BC tales que $py^2 + qyz + rz^2 = 0$ es*

$$(p - q + r)(a^2yz + b^2zx + c^2xy) - a^2(x + y + z)(py + rz) = 0.$$

Usando este lema, la circunferencia que pasa por A y por los puntos $(0 : y : z)$ de la recta BC tales que $c^2y^2 - b^2yz - c^2yz - 3b^2z^2 = 0$ tiene ecuación:

$$2(b^2 - c^2)(c^2xy + b^2xz + a^2yz) - a^2(x + y + z)(c^2y - 3b^2z) = 0.$$

La segunda intersección de esta circunferencia y la recta CA es el punto $Y = (3a^2 : 0 : -3a^2 + 2b^2 - 2c^2)$, y la segunda intersección con la recta AB es el punto $Z = (a^2 : -a^2 - 2b^2 + 2c^2 : 0)$.

Si encontramos una construcción sencilla de estos puntos, podemos construir la circunferencia AYZ y su intersección con la recta BC.

Teniendo en cuenta que $Y = (3a^2 : 0 : -3a^2 + 2b^2 - 2c^2)$, hallamos

$$\begin{aligned} &\frac{CY}{YA} = \frac{3a^2}{-3a^2 + 2b^2 - 2c^2} \\ \Rightarrow &\frac{CY}{CA} = \frac{CY}{CY + YA} = \frac{3a^2}{3a^2 + (-3a^2 + 2b^2 - 2c^2)} \\ \Rightarrow &\frac{CY}{CA} = \frac{3a^2}{2(b^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

De la misma forma, hallamos

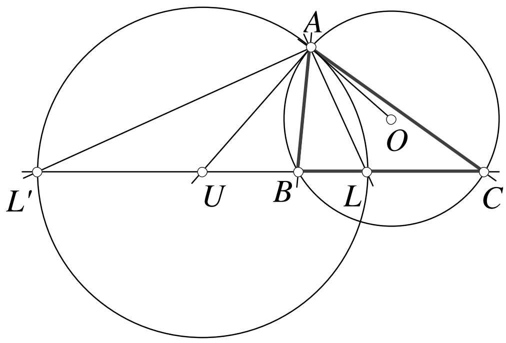
$$\begin{aligned} &\frac{BZ}{AZ} = \frac{a^2}{a^2 + 2b^2 - 2c^2} \\ \Rightarrow &\frac{BZ}{AB} = \frac{BZ}{AZ - BZ} = \frac{a^2}{2(b^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Usaremos ahora otro lema que establece hechos conocidos relacionados con las circunferencias de Apolonio:

Lema 2. *Supongamos que en un triángulo ABC las bisectrices interior y exterior cortan a BC en L y L'. Si U es el punto medio de LL', entonces*

$$\frac{BU}{UC} = -\frac{c^2}{b^2}.$$

Además, las circunferencias (LL') y (O) son ortogonales, es decir, la recta AU es tangente en A a la circunferencia circunscrita a ABC.



Ahora, usando el Lema 2,

$$\begin{aligned} &\frac{BU}{UC} = -\frac{c^2}{b^2}, \quad BC = BU + UC \\ \Rightarrow &BU = \frac{-c^2}{b^2 - c^2} BC, \quad UC = \frac{b^2}{b^2 - c^2} BC. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

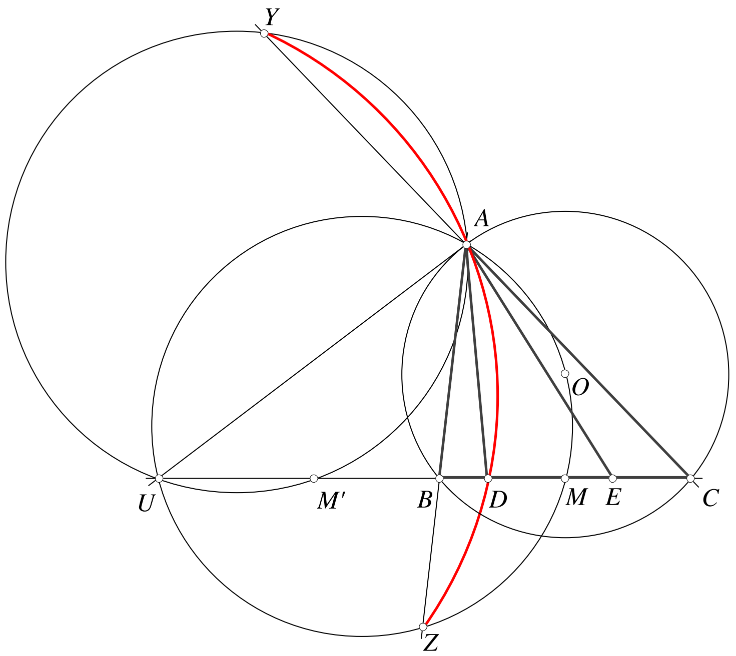
$$\begin{aligned} BZ \cdot BA =& \frac{BZ}{BA} \cdot BA^2 = \frac{-a^2}{2(b^2-c^2)} \cdot c^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{-c^2}{b^2-c^2} \\ =& \frac{BC^2}{2} \cdot \frac{BU}{BC} = BM \cdot BU, \end{aligned}$$

siendo M el punto medio de BC, obtenemos que los puntos U, M, A, Z son concíclicos, es decir Z es la segunda intersección con la recta AB de la circunferencia AMU.

De forma parecida,

$$CA \cdot CY = CA^2 \cdot \frac{CY}{CA} = b^2 \cdot \frac{3a^2}{2(b^2-c^2)} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{b^2 a}{b^2-c^2} = CM' \cdot CU,$$

siendo M el punto simétrico de M respecto de B, por lo que Y es la segunda intersección con la recta CA de la circunferencia $UM'A$.



Entonces, dado el triángulo ABC tenemos la siguiente construcción:

1. O es el circuncentro de ABC.
2. La perpendicular por A a AO corta en U a BC.
3. Sea M el punto medio de BC y M' el punto simétrico de M respecto de B.
4. La circunferencia (UMA) vuelve cortar a AB en Z.
5. La circunferencia $(UM'A)$ vuelve cortar a CA en Y.
6. La circunferencia (AYZ) corta al segmento BC en D.
7. la recta simétrica de AD respecto de la bisectriz interior de A corta a BC en E.