Problema 798 de *triánguloscabri*. *Hallar un triángulo tal que la mediana del vértice A sea igual que el lado b ($m_a = b$), y que la bisectriz interior de B sea igual al lado c ($w_b = c$).*

Solución de Francisco Javier García Capitán. Usando las fórmulas conocidas

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad w_b^2 = ca\left(1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right),$$

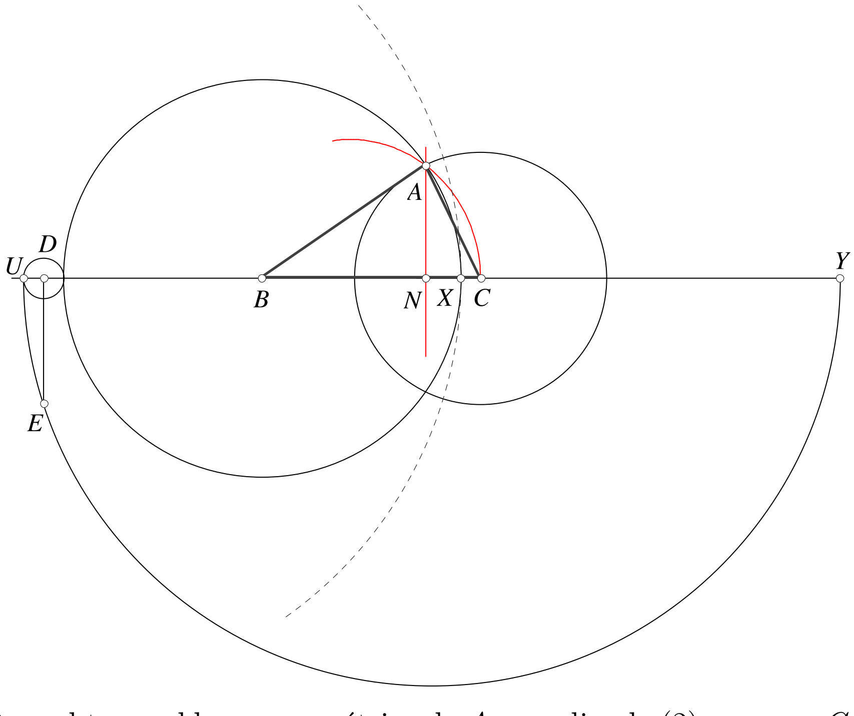
las hipótesis del problema son equivalentes a las relaciones:

$$b^2 = c^2 - \frac{a^2}{2}, \tag{1}$$

$$b^2 = \frac{(a+c)^2(a-c)}{a} = \frac{(a+c)^2}{a} \cdot (a-c). \tag{2}$$

Estas condiciones implican que debe ser $\frac{a}{\sqrt{2}} < c < a$.

Si usamos coordenadas cartesianas $B = (0,0)$, $C = (a,0)$, $A = (x,y)$, la ecuación (1) equivale a $x = \frac{3a}{4}$, por lo que el lugar geométrico para el punto A cumpliendo (1) es la perpendicular a BC por el punto N que divide a BC en la proporción $3:1$.



Para obtener el lugar geométrico de A cumpliendo (2), usamos *Cabri*. Suponiendo el problema resuelto, tomemos un punto X sobre BC y llamemos $BX = c$. Sea D el punto simétrico de C respecto de B. En la prolongación de CD, marcamos un punto U tal que $UD = XC$. Sea Y el inverso de B respecto de una circunferencia de centro D y radio DX. Por D trazamos una perpendicular a BC, que corta a la semicircunferencia de diámetro UX en E.

Se cumplirá que

$$DE^2 = UD \cdot DY = XC \cdot \frac{DX^2}{DB} = (c-a) \cdot \frac{(c+a)^2}{a} = b^2$$

Por tanto, la circunferencia con centro B y radio BX y la circunferencia con centro C y radio DE se cortarán en un punto A que nos dará un triángulo ABC cumpliendo (2). El lugar geométrico de estos A es una curva de grado superior. Su intersección con la perpendicular por N da la solución del problema, que no es construible con regla y compás.