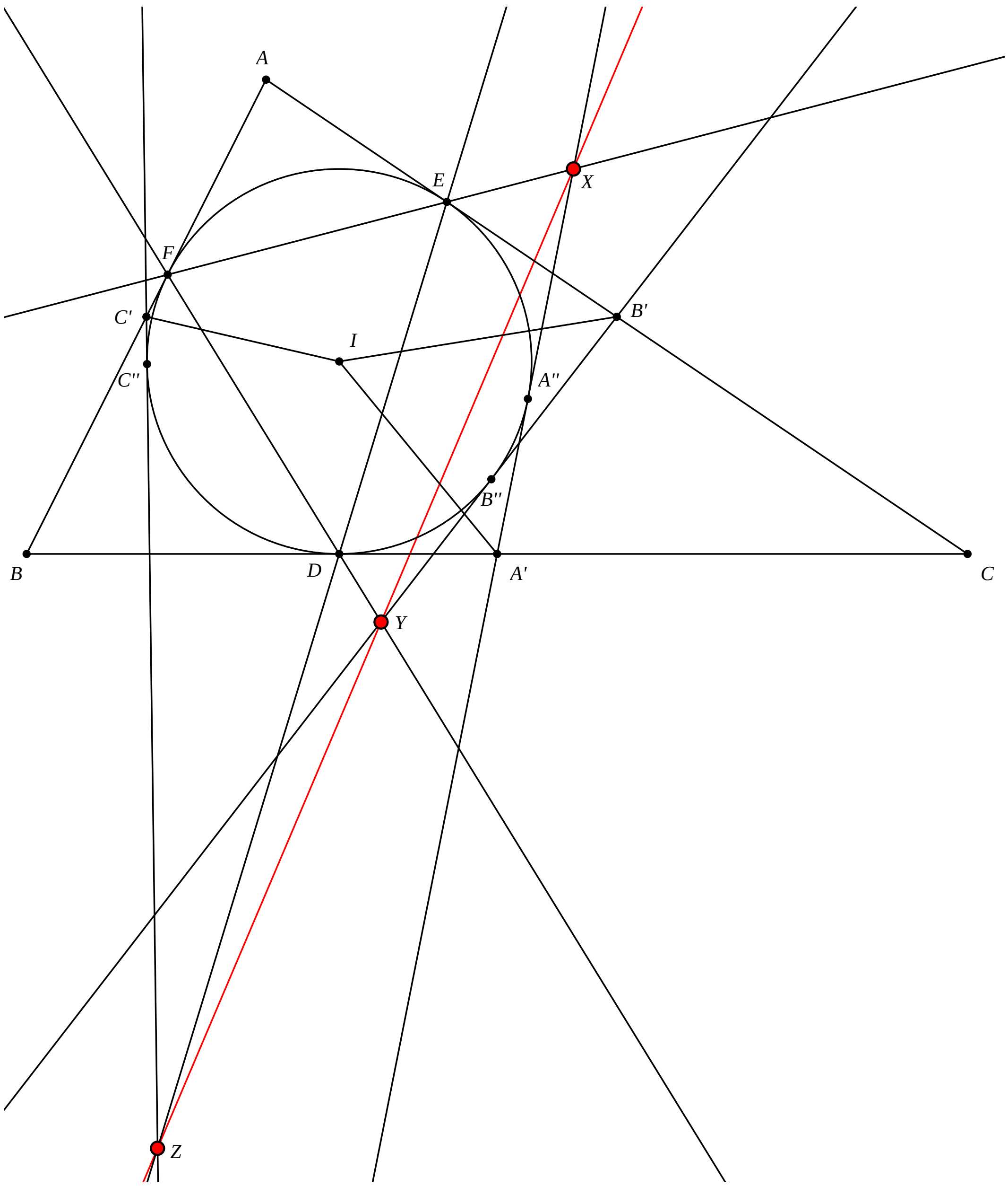
Problema 799. Sea ABC un triángulo. Sean D, E y F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con BC, CA y AB. Sean A', B', C' los puntos medios de BC, CA y AB. Sean A'', B'', C'' los puntos de contacto con la circunferencia inscrita de las segundas tangentes trazadas por A', B', C'. Sea X el punto de intersección de $A'A''$ con EF, Y el punto de intersección de $B'B''$ con FD, Z el punto de intersección de $C'C''$ con DE. Demostrar que X, Y, Z están alineados.

Aymé, J. L. (2016): Comunicación personal.

Solución de Ercole Suppa.



Usando coordenadas baricéntricas[1] los puntos D, E, F tienen coordenadas

$$D(0 : a+b-c : a-b+c), \quad E(a+b-c : 0 : -a+b+c), \quad F(a-b+c : -a+b+c : 0)$$

[1]En la realización de los cálculos se utilizó Mathematica y el paquete `baricentricas.nb`, descargable desde el sitio de Francisco Javier García Capitán http://garciacapitan.esy.es/baricentricas/.

Los puntos A', B', C' tienen coordenadas

$$A'(0:1:1), \quad B'(1:0:1), \quad C'(1:1:0)$$

El punto A'' es el reflejo de D con respecto a la línea IA' de ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b-c)x - ay + az = 0$$

por tanto, desarrollando y simplificando, tiene coordenadas

$$A''\left(4(b-c)^2 : -a^2+2ab-b^2+c^2 : -a^2+b^2+2ac-c^2\right)$$

Cíclicamente tenemos que

$$B''\left(-a^2+2ab-b^2+c^2 : 4(a-c)^2 : a^2-(b-c)^2\right)$$
$$C''\left(-a^2+b^2+2ac-c^2 : a^2-(b-c)^2 : 4(a-b)^2\right)$$

Las ecuaciones de las rectas $A'A''$ y EF son, respectivamente

$$A'A'' : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 4(b-c)^2 & -a^2+2ab-b^2+c^2 & -a^2+b^2+2ac-c^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b-c)x + 2(c-b)y + 2(b-c)z = 0$$

$$EF : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 4(b-c)^2 & -a^2+2ab-b^2+c^2 & -a^2+b^2+2ac-c^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b-c)x + (a-b+c)y + (a+b-c)z = 0$$

Las coordenadas del punto X se obtienen resolviendo el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (a-b-c)x + 2(c-b)y + 2(b-c)z = 0 \\ (a-b-c)x + (a-b+c)y + (a+b-c)z = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$X\left(4a(-b+c) : -a^2+2ab-b^2+c^2 : a^2-b^2-2ac+c^2\right)$$

Cíclicamente tenemos que

$$Y\left(-a^2+2ab-b^2+c^2 : 4b(-a+c) : -a^2+(b-c)^2\right)$$
$$Z\left(-a^2+b^2+2ac-c^2 : -a^2+(b-c)^2 : 4(-a+b)c\right)$$

Los puntos X, Y, Z están alineados dado que el determinante formado por sus coordenadas se anula, como se puede comprobar fácilmente

$$\begin{vmatrix} 4a(-b+c) & -a^2+2ab-b^2+c^2 & a^2-b^2-2ac+c^2 \\ -a^2+2ab-b^2+c^2 & 4b(-a+c) & -a^2+(b-c)^2 \\ -a^2+b^2+2ac-c^2 & -a^2+(b-c)^2 & 4(-a+b)c \end{vmatrix} = 0$$

$\square$