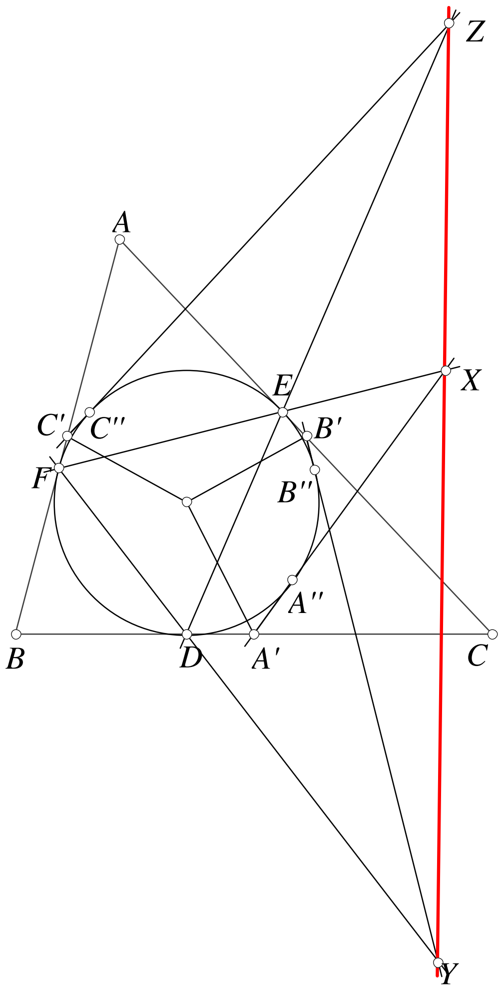
Problema 799 de *triánguloscabri*. *Sea ABC un triángulo. Sean D, E y F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con BC, CA y AB. Sean A', B', C' los puntos medios de BC, CA y AB. Sean A'', B'', C'' los puntos de contacto con la circunferencia inscrita de las segundas tangentes trazadas por A', B', C'. Sea X el punto de intersección de $A'A''$ con EF, Y el punto de intersección de $B'B''$ con FD y Z el punto de intersección de $C'C''$ con DE. Demostrar que X, Y, Z están alineados.*

Propuesto por Jean-Louis Aymé.



Solución de Francisco Javier García Capitán. En esta figura, el triángulo DEF es el triangulo ceviano de X_7, el punto de Gergonne, y $A'B'C'$ es el triángulo ceviano del baricentro G.

Vamos a sustituir G por cualquier punto P con triángulo ceviano $A'B'C'$ y X_7 por cualquier otro punto Q y así considerar la cónica inscrita en el triángulo ABC con perspector Q, que será tangente a los lados del triángulo en los vértices del triángulo ceviano DEF de Q.

Entonces, si $P = (u : v : w)$ y $Q = (p : q : r)$, tendremos $A' = (0 : v : w)$ y $D = (0 : q : r)$. La polar de A' respecto de la cónica es la recta

$$-qr(rv + qw)x + pr(rv - qw)y + pq(-rv + qw)z = 0,$$

que vuelve a cortar a la cónica en el punto

$$A'' = \left(p(rv - qw)^2 : qr^2v^2 : q^2rw^2\right),$$

de manera que la recta $A'A''$ tiene ecuación

$$qrvwx + pw(-rv + qw)y + pv(rv - qw)z = 0.$$

Esta recta corta a la recta $EF : qrx - pry - pqz = 0$ en el punto

$$X = \left(p(r^2v^2 - q^2w^2) : qr^2v^2 : -q^2rw^2\right).$$

De la misma forma podemos hallar las coordenadas de los puntos Y y Z, obteniendo que todos están sobre la recta ℓ de ecuación

$$\begin{aligned} &qr(-q^2r^2u^2 + p^2r^2v^2 + p^2q^2w^2)x \\ &+pr(q^2r^2u^2 - p^2r^2v^2 + p^2q^2w^2)y \\ &+pq(q^2r^2u^2 + p^2r^2v^2 - p^2q^2w^2)z = 0. \end{aligned}$$

Esta recta es la polar del punto $S = (qru^2 : prv^2 : pqw^2)$ respecto de la cónica.

Cuando $P = G$ y $Q = X_7$, la recta ℓ es la polar de X_8 (el punto de Nagel) respecto de la circunferencia inscrita.