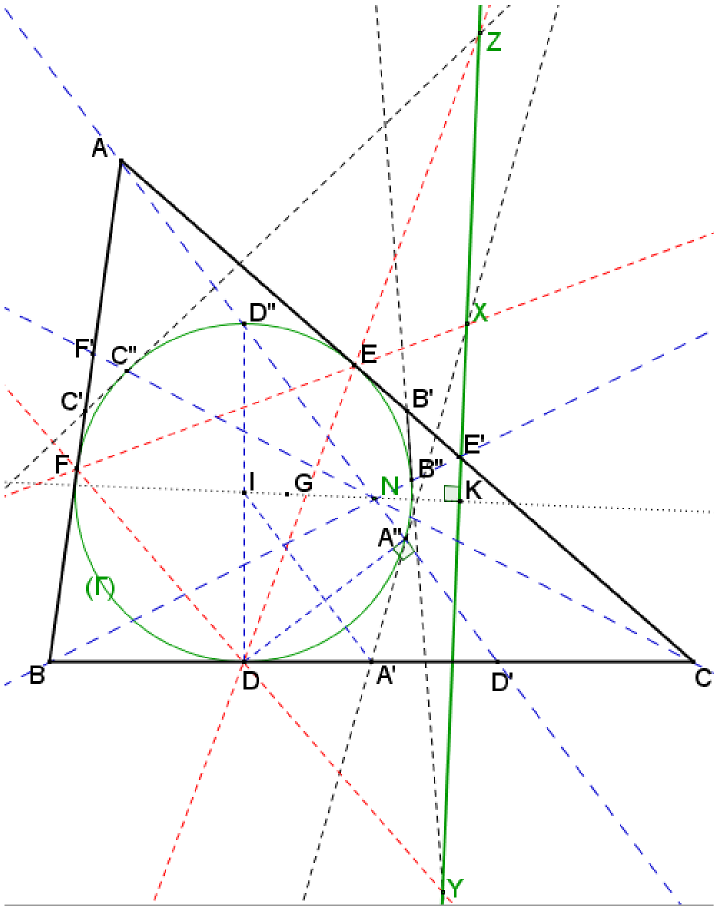
Problema 799
Sea ABC un triángulo. Sean D E y F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con BC, CA y AB. Sean A' B' C' los puntos medios de BC, CA y AB. Sean A" B" C" los puntos de contacto con la circunferencia inscrita de las segundas tangentes trazadas por A', B', C'. Sea X el punto de intersección de A'A" con EF. Y el punto de intersección de B'B" con FD, Z el punto de intersección de C'C" con DE. Demostrar que X, Y, Z están alineados.
Aymé, J. L. (2016): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Réponse: les points X,Y et Z sont sur une même droite qui est la polaire du point de Nagel du triangle ABC par rapport au cercle inscrit (Γ) de ce même triangle.
Démonstration:
Les droites AA", BB" et CC" rencontrent respectivement les côtés BC,CA et AB aux points D',E' et F'qui sont les points de contact des trois cercles exinscrits du triangle ABC avec ces côtés.(1)
Orn démontre aisément avec le théorème de Ceva que les céviennes AD',BE' et CF' se rencontrent en un même point N, appelé point de Nagel du triangle ABC.
Par construction la polaire de A par rapport à (Γ) est la droite FEX. Comme XA" est tangente à (Γ), la polaire de X par rapport à (Γ) est donc la droite AA". De la même manière les polaires de Y et de Z toujours par rapport à (Γ) sont respectivement les droites BB" et CC".
Il en résulte que les points X,Y et Z sont alignés sur la polaire de N par rapport à (Γ).
Nota: G étant son centre de gravité, les points I,G,N sont alignés avec GN = IG et la droite IGN est perpendiculaire à la droite XYZ.

(1) Le point de contact D' du cercle exinscrit dans le secteur angulaire BAC avec le côté BC est le symétrique de D par rapport au milieu A' de BC et la droite AD' passe par le point D" diamétralement opposé à D sur le cercle (Γ). Voir J.L.Aymé,Yufei Zhao, P.Debart et alii.
I étant le centre du cercle inscrit du triangle ABC et A" le point d'intersection de AD' avec (Γ), il en résulte que IA' est parallèle à AA". Les triangles DA"D" er DA"D' sont rectangles en A".
On a donc A'D = A'A" = A'D'. Les triangles IDA' et IA"A' qui ont trois côtés égaux pris deux à deux sont isométriques,l'angle IA"A' est droit et la droite A'A" est tangente au cercle (Γ).