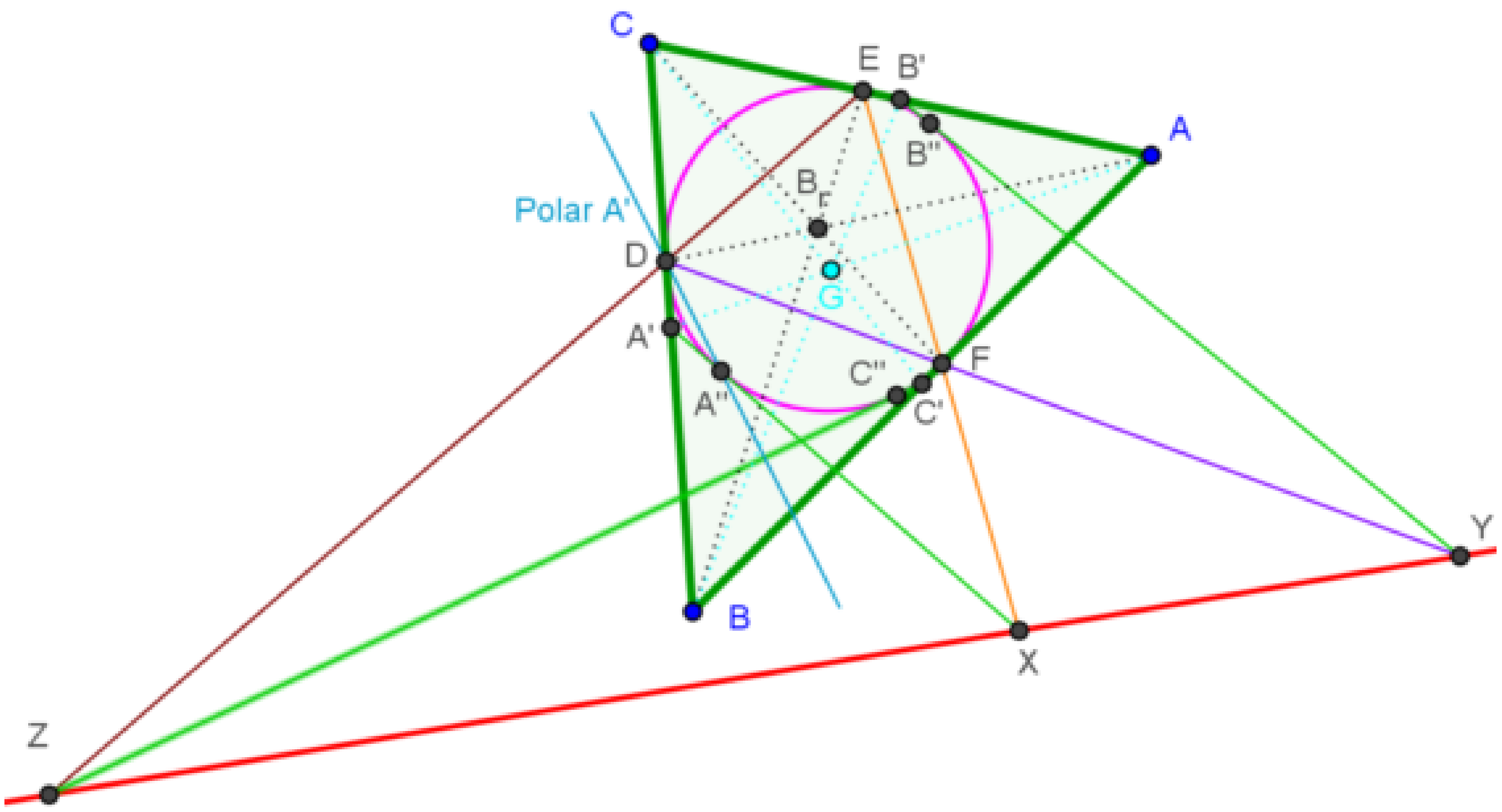
***Problema 799**.- Sea ABC un triángulo. Sean D, E y F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con BC, CA y AB. Sean A', B', C' los puntos medios de BC, CA y AB. Sean A'', B'', C'' los puntos de contacto con la circunferencia inscrita de las segundas tangentes trazadas por A', B', C'. Sea X el punto de intersección de $A'A''$ con EF, Y el punto de intersección de $B'B''$ con FD y Z el punto de intersección de $C'C''$ con DE.*

Demostrar que X, Y y Z están alineados.

Aymé, J.L. (2016): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Las rectas AD, BE, CF concurren en el punto de Gergonne del triángulo y, si sustituimos la circunferencia inscrita por una cónica arbitraria, el punto de concurrencia es el punto de Brianchon, también llamado *perspector* para la cónica en cuestión. Llamemos B_r a este punto y si sus coordenadas baricéntricas respecto de ABC son $B_r = (p: q: r)$, la ecuación de la cónica inscrita adopta la forma

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} - \frac{2yz}{qr} - \frac{2zx}{rp} - \frac{2xy}{pq} = 0$$

Con esto, para los puntos de contacto tendremos $D(0: q: r)$; $E(p: 0: r)$ y $F(p: q: 0)$.

Los puntos A', B', C' son las proyecciones del baricentro sobre los lados; también pueden ser sustituidos por las proyecciones de un punto arbitrario $G = (u: v: w)$. Con esto se tiene ahora $A' = (0: v: w)$; $B' = (u: 0: w)$ y $C' = (u: v: 0)$.

Para hallar A'' vamos a calcular la polar de A' respecto de la cónica inscrita. Con suficiente paciencia en el cálculo podemos llegar a obtener la recta polar de A' (recta DA''):

$$a': qr(rv + qw)x - pr(rv - qw)y + pq(rv - qw)z = 0$$

que corta a la cónica inscrita en el punto $A'' = [p(rv - qw)^2 : qr^2v^2 : q^2rw^2]$ (además de D).

La segunda tangente $A'A''$ tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & v & w \\ p(rv - qw)^2 & qr^2v^2 & q^2rw^2 \end{vmatrix} = 0$$

o bien, después de simplificar, $qrvwx + pw(qw - rv)y + pv(rv - qw)z = 0$

La recta EF con la que tenemos que intersecar la anterior tiene ecuación $r_{EF}: \frac{x}{p} = \frac{y}{q} + \frac{z}{r}$.

La intersección con EF es el punto X, que resulta ser $X = [p(q^2w^2 - r^2v^2): -qr^2v^2: q^2rw^2]$.

La recta r_{DF} es $\frac{y}{q} = \frac{x}{p} + \frac{z}{r}$. De forma similar $B'B''$ corta a DF en el punto $Y = [-pr^2u^2: q(p^2w^2 - r^2u^2): p^2rw^2]$.

La recta DE es $r_{DE}: \frac{z}{r} = \frac{y}{q} + \frac{x}{p}$, y el punto $Z = [-pq^2u^2: p^2qv^2: r(p^2v^2 - q^2u^2)]$.

Para ver la alineación de esos puntos habremos de calcular el determinante formado con sus coordenadas.

$$\frac{1}{pqr} \cdot \det(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} q^2w^2 - r^2v^2 & -r^2v^2 & q^2w^2 \\ -r^2u^2 & p^2w^2 - r^2u^2 & p^2w^2 \\ -q^2u^2 & p^2v^2 & p^2v^2 - q^2u^2 \end{vmatrix} = 0$$

En este determinante a la primera columna le resto la suma de las otras dos; después, extraigo un factor -2 y -a la segunda y tercera columnas- le resto la primera. Finalmente, extrayendo factores, obtengo un determinante que vale cero. Y con esto concluimos.■