Problema 800. Dado el triángulo $\triangle ABC$ y un punto P, llamamos XYZ al triángulo ceviano de P respecto $\triangle ABC$. Hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el triángulo $\triangle AYZ$ tiene la mitad de área que $\triangle ABC$.

Francisco Javier García Capitán (2016), comunicación personal.

Solución de Ercole Suppa. Usamos coordenadas baricéntricas. Puesto $P(x, y, z)$, tenemos que

$$X = (0 : y : z), \quad Y = (x : 0 : z), \quad Z = (x : y : 0)$$

Usando la fórmula del área en coordenadas baricéntricas, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(XYZ)}{(ABC)} = \pm\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(x+z)(x+y)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{yz}{(x+z)(x+y)} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

que conducen a dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : &\quad x^2 + xy + xz + 3yz = 0 \\ \mathcal{C}_2 : &\quad x^2 + xy + xz - yz = 0 \end{aligned}$$

Entonces el lugar geométrico de los puntos $P(x : y : z)$ que cumplen la condicion requerida es la unión de dos cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que ahora vamos a estudiar.

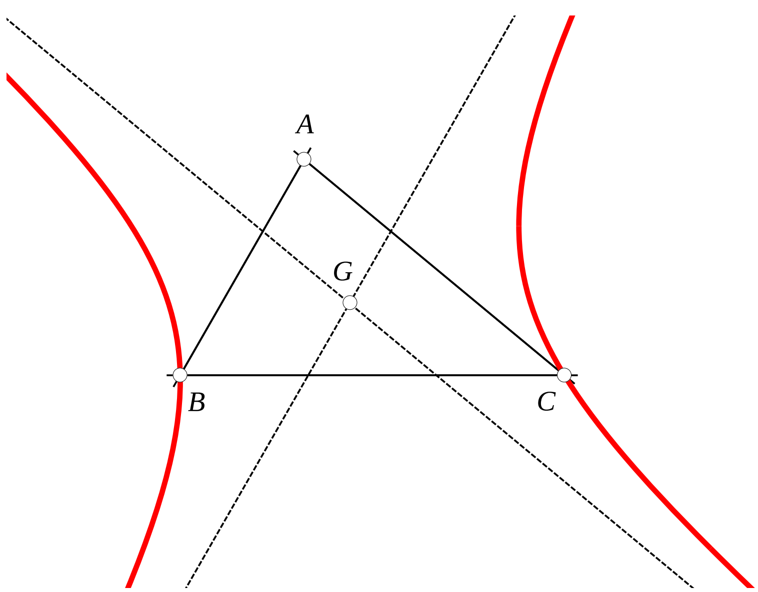
La conica $\mathcal{C}_1$ pasa por los puntos $B(0 : 1 : 0)$, $C(0 : 0 : 1)$ y tiene dos puntos en el infinito $I_1(1 : -1 : 0)$ y $I_2(1 : 0 : -1)$ ya que

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz + 3yz = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + x(y+z) + 3yz = 0 \\ y + z = -x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} yz = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $\mathcal{C}_1$ es una hipérbola con centro en $G(1 : 1 : 1)$ como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los asíntotas GI_1 y GI_2 tienen ecuaciones $x + y - 2z = 0$ y $x - 2y + z = 0$ y son paralelas a las lineas AB y AC respectivamente.



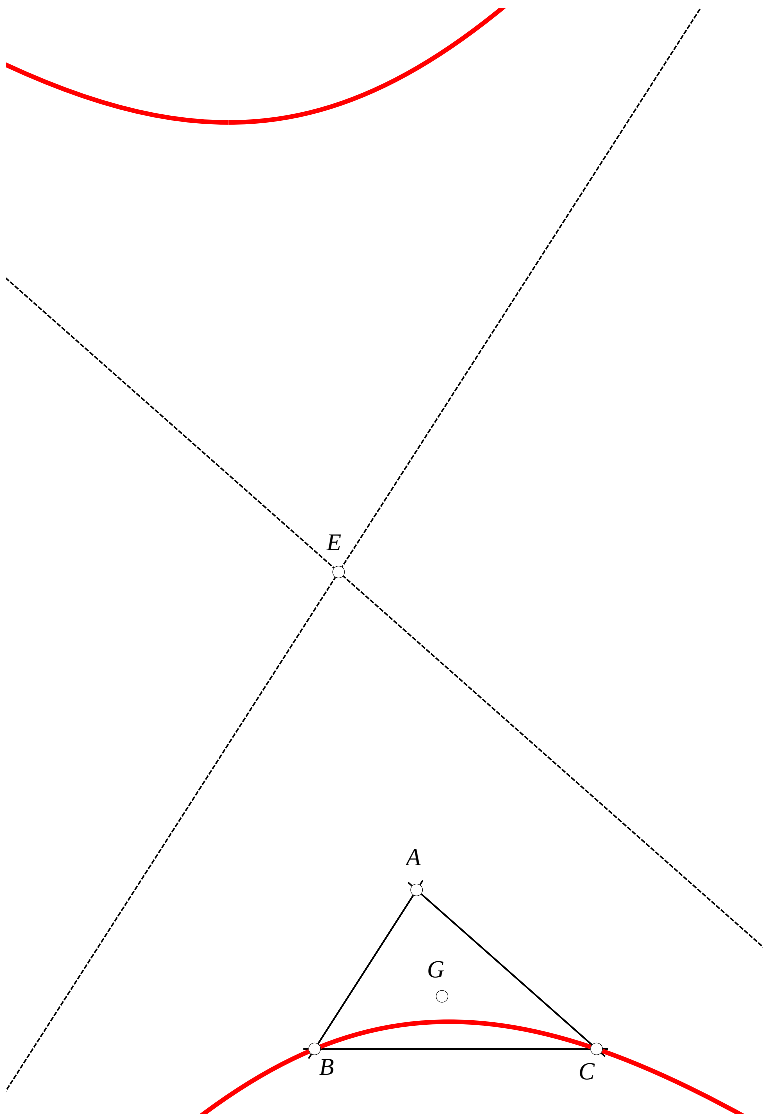
La conica $\mathcal{C}_2$ pasa por los puntos $B(0:1:0)$, $C(0:0:1)$ y tiene dos puntos en el infinito $I_1(1:-1:0)$ y $I_2(1:0:-1)$ ya que

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+xy+xz-yz=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^2+x(y+z)-yz=0 \\ y+z=-x \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} yz=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$$

Por lo tanto $\mathcal{C}_2$ es una hipérbola con centro en el punto $E(-3:1:1)$ de tal manera que $EA = 3 \cdot AG$, como

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Los asíntotas EI_1 y EI_2 tienen ecuaciones $x+y+2z=0$ y $x+2y+z=0$ y son paralelas a las lineas AB y AC respectivamente.



$\square$