Problema 800 de *triánguloscabri*. *Dado el triángulo ABC y un punto P, llamamos XYZ al triángulo ceviano de P respecto ABC. Hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el triángulo AYZ tiene la mitad de área que ABC.*

Propuesto por Francisco Javier García Capitán.

Solución de *Francisco Javier García Capitán.*

Usando coordenadas baricéntricas, si $P = (u : v : w)$ tendremos $Y = (x : 0 : z)$ y $Z = (x : y : z)$. Entonces, usando la fórmula del cociente $(AYZ)/(ABC) = \pm\frac{1}{2}$, tendremos

$$\frac{1}{(x+z)(x+y)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-yz}{(x+z)(x+y)} = \pm\frac{1}{2},$$

que nos lleva a alguna de las ecuaciones

$$x^2 + xy + xz + 3yz = 0, \tag{1}$$
$$x^2 + xy + xz - yz = 0. \tag{2}$$

La cónica (1) pasa por B y C, y sus puntos infinitos son los puntos $J_b = (-1 : 0 : 1)$ y $J_c = (-1 : 1 : 0)$, es decir los puntos del infinito de las rectas CA y AB. Escrita en forma matricial $PMP^t = 0$, obtenemos la matriz M y su adjunta:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(M) = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

de manera que el centro de la cónica, polar de la recta del infinito $x + y + z = 0$ es el baricentro G del triángulo ABC.

Para obtener algún punto más de la hipérbola, observamos que ésta pasa por los puntos $(\pm\sqrt{3} : -1 : 1)$. cuyo punto medio es A y están en sobre las recta $y + z = 0$, paralela a BC por A.

Si trazamos una paralela por $V = (\sqrt{3} : -1 : 1)$ a la mediana AG, su intersección con la recta BC nos da el punto $N = (0 : 2-\sqrt{3} : -2-\sqrt{3})$.

Usamos el siguiente lema:

Lema. *Si $X = (0 : v : w)$ es un punto de la recta BC y M es el punto medio de BC, la distancia (con signo) entre M y X viene dada por la fórmula*

$$MX = \frac{(w-v)a}{2(v+w)}.$$

Demostración. Para cada punto O sobre la recta BC se tendrá la relación

$$OX = \frac{v}{v+w}OB + \frac{w}{v+w}OC.$$

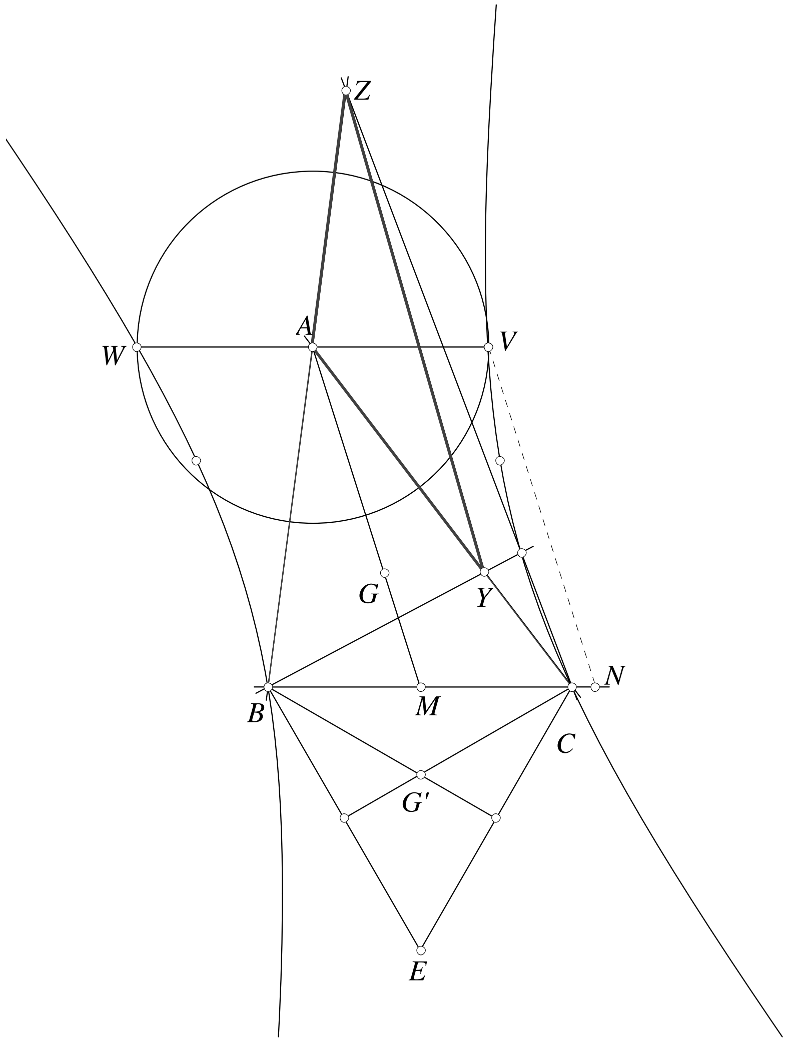
Tomando como origen O el punto m tendremos las abscisas

$$x = \frac{v}{v+w}\left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{w}{v+w}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{(w-v)\,a}{(v+w)\,2}.$$

Aplicando este lema obtenemos que

$$AV = MN = \frac{-4}{-2\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Entonces, dado el triángulo ABC, tenemos la siguiente construcción:



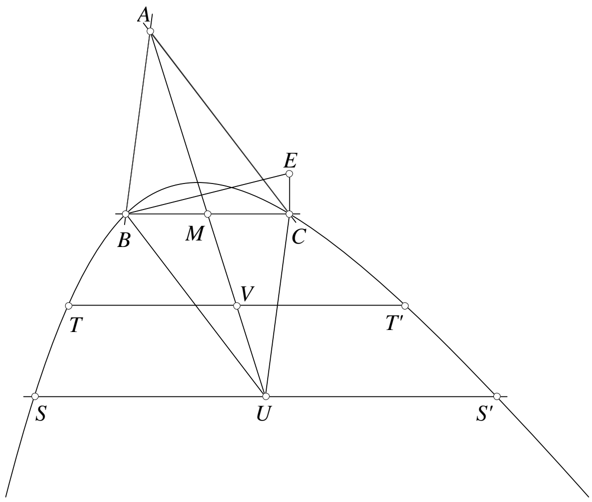
1. Hallamos el punto medio M del lado BC y el baricentro G.
2. Construimoos un triángulo equilátero EBC y su baricentro G'.
3. Trazamos la paralela por A a BC y sus puntos de intersección V, W con una circunferencia de centro A y radio GE.
4. Ahora podemos calcular la hipérbola que pasa por los puntos B, C, V, W y cualquiera de sus simétricos respecto del baricentro, que es el centro de la cónica.

La cónica (2) también tiene a J_b y J_c como puntos del infinito. Obtenemos su forma matricial $PMP^t = 0$ y la matriz adjunta de M.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(M) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

A partir de aquí vemos que su centro es el punto $Q = (-3 : 1 : 1)$. Este punto está sobre la mediana AG y cumple $QA : AM = 2 : 1$, siendo M el punto medio de BC.

El punto Q por tanto queda muy lejos del triángulo ABC. Para encontrar puntos más próximos a la figura del triángulo, consideramos el punto simétrico U de A respecto de M y el punto medio V de MU.



La paralela por U a BC corta a la cónica en puntos S, S' de la forma $(1 : 1 \pm \sqrt{2} : 1 \mp \sqrt{2})$. Estos puntos con punto medio U están a distancia $\sqrt{2}a$ del punto U, longitud fácilmente de obtener.

La paralela por V a BC corta a la cónica en puntos T, T' de la forma $(1 : 1 \pm \sqrt{2} : 1 \mp \sqrt{2})$. Estos puntos con punto medio V están a distancia $\frac{\sqrt{17}a}{2}$ del punto V. Para obtener esta longitud, levantamos una perpendicular $CE = \frac{BC}{4}$ y entonces $BE = \frac{\sqrt{17}a}{2}$.