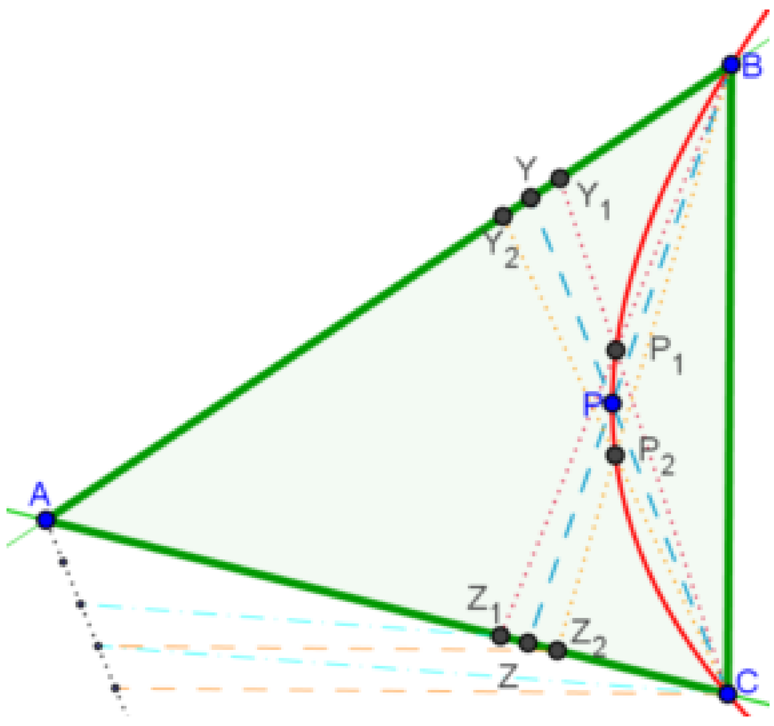
***Problema** 800.- Dado el triángulo ABC y un punto P, llamamos XYZ al triángulo ceviano de P respecto ABC. Hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el triángulo AYZ tiene la mitad de área que ABC.*

García. J.F. (2016): Comunicación personal.



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Voy a suponer que el punto P está dentro del ángulo A y no situado sobre ningún lado. Para evitar problemas con el signo de las áreas voy a suponer que Y está sobre AB y Z sobre AC. De este modo las áreas de ABC y AYZ tienen el mismo signo.

Para hacer la figura hemos tomado los segmentos $AZ = \frac{AC}{\sqrt{2}}$; $AZ_1 = \frac{2}{3}AC$ y $AZ_2 = \frac{3}{4}AC$ por una parte y $AY = \frac{AB}{\sqrt{2}}$; $AY_1 = \frac{3}{4}AB$ y $AY_2 = \frac{2}{3}AB$ por otra.

En todos los casos se tiene $AY_i \cdot AZ_i = \frac{1}{2}AC \cdot AB$, que nos asegura que el área del triángulo AY_iZ_i es la mitad del área de ABC.

a) En coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC es $P = (x\colon y\colon z)$. Para los puntos $Y,\ Z$, proyecciones de P sobre los lados del ángulo A, tenemos $Z = (x\colon 0\colon z)$; $Y = (x\colon y\colon 0)$.

El área del triángulo AYZ, usando estas coordenadas, se relaciona con el área de ABC según la expresión

$$[AYZ] = [ABC] \cdot \det(A, Y, Z)$$

donde $[JKL]$ expresa el área del triángulo JKL.

Aplicada al asunto que nos ocupa, la ecuación del lugar buscado viene descrita por la expresión

$$\det(A, Y, Z) = \frac{1}{2}$$

De ello resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{x}{x+y} & \frac{y}{x+z} & 0 \\ \frac{x}{x+z} & 0 & \frac{z}{x+y} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

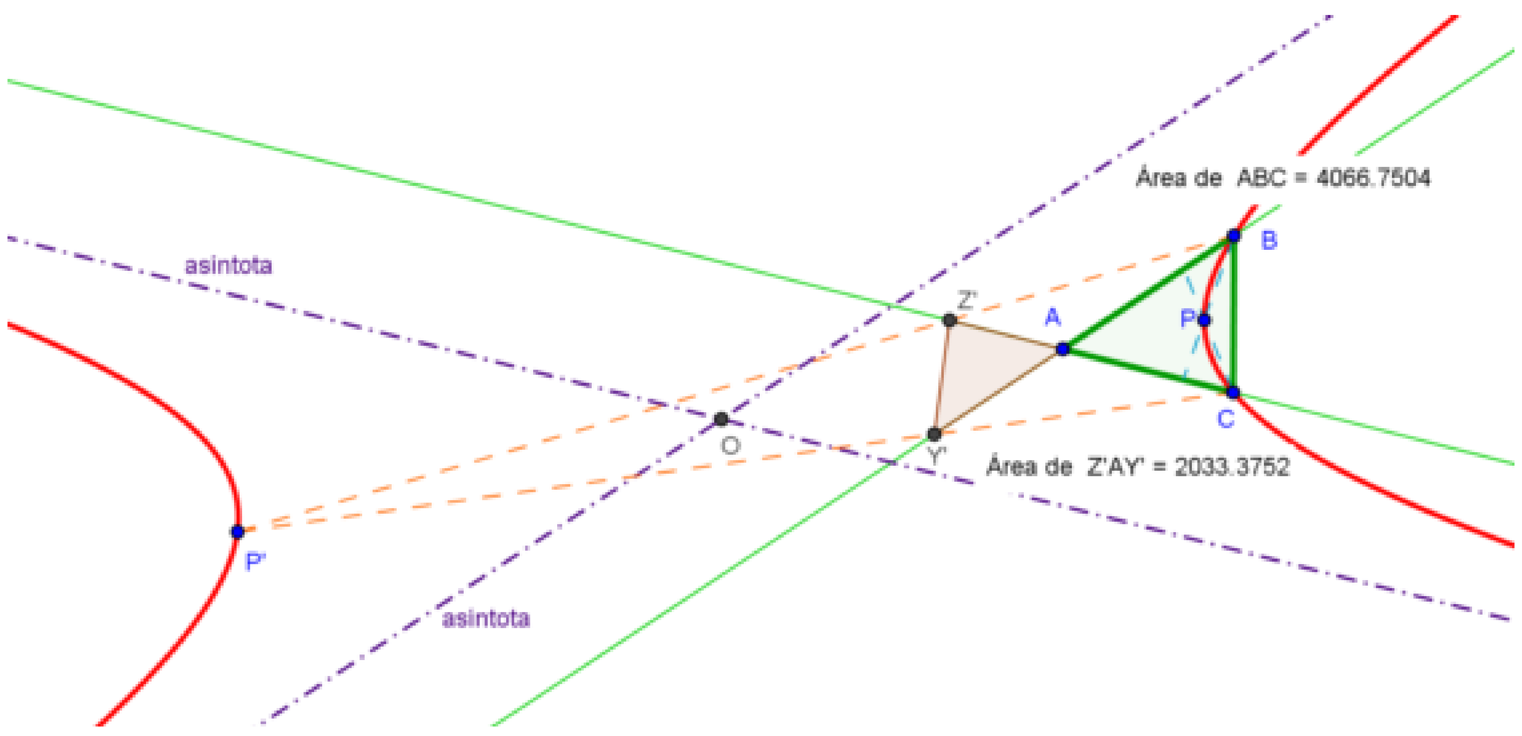
Si desarrollamos tenemos $\frac{yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{1}{2}$, o bien $2yz = (x+y)(x+z)$ que es la ecuación de una cónica. La recta del infinito es la de ecuación $x + y + z = 0$, por tanto, la cónica anterior es una hipérbola pues los puntos $U = (1\colon -1\colon 0)$ y $V = (1\colon 0\colon -1)$ pertenecen a la misma: son los puntos del infinito de los lados AB y AC respectivamente, que son paralelos a las asíntotas de la misma. También están en ella los puntos $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$.

La ecuación desarrollada es $x^2 + xy + xz - yz = 0$ cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Su centro es el punto $O = (3, -1, -1)$ y sus asíntotas las rectas de ecuaciones respectivas

$x + y + 2z = 0$ y $x + 2y + z = 0$.



b) Dado un punto Y de la recta AB, le asignamos el punto Z de AC con la condición de que $AB \cdot AC = 2AY \cdot AZ$ (ambos al mismo lado –derecha o izda- de A). Dada una recta $b = BY$ (del haz de las que pasan por B) le asigno la recta CZ (del haz de las que pasan por C).Esta asignación define una proyectividad entre los haces que pasan por B y C. Los puntos de intersección de los pares homólogos definen una cónica, que también pasa por los polos B y C.

Si considero el punto $Y = A$ como punto de la recta AB, su homólogo Z ha de estar en el infinito de la recta AC. Así pues esta cónica tiene asíntotas paralelas a las rectas AB y AC.

Notas.

1. Si se considerase la condición $\det(A, Y, Z) = -\frac{1}{2}$, procediendo de forma análoga obtendríamos otra hipérbola para el lugar geométrico.

2. El problema fue tratado de forma ligeramente distinta en esta revista en la primera quincena de febrero de 2004 (problema nº 137).

■