Problema 801 de *triánguloscabri*. *Construir el triángulo cuyos datos son: a, m_a, $b+c$.*

Propuesto por Julián Santamaría Tobar.

Solución de *Francisco Javier García Capitán*. Fijando B y C sobre una recta tales que $BC = a$, el vértice A está en dos lugares geométricos: la circunferencia de centro M_a y radio m_a y la elipse con focos B y C y diámetro mayor $b+c$. Si podemos usar cónicas, esto da una solución al problema.

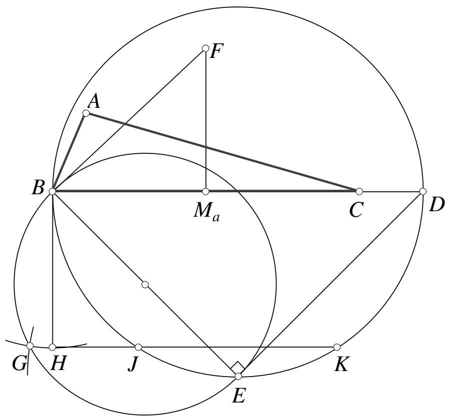
Para evitar el uso de cónicas, teniendo en cuenta la fórmula de la mediana

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

si expresamos $k = b+c$ y $bc = \lambda^2$, tenemos

$$\lambda^2 = \frac{(b+c)^2-(b^2+c^2)}{2} = \frac{k^2-2\left(m_a^2+\frac{a^2}{4}\right)}{2} = \frac{k^2}{2} - \left(m_a^2+\frac{a^2}{4}\right).$$

Esto permite obtener b y c como soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - kx + \lambda^2 = 0$.



Dados a, m_a y $k = b+c$, hacemos la siguiente construcción:

1. Sobre una recta cualquiera fijamos los puntos puntos B y C tales que $BC = a$.
2. Hallamos el punto medio M_a de BC.
3. Prolongamos BC hasta D tal que $BD = k$.
4. Construimos el triángulo isósceles BED con $E = 90°$.
5. En la mediatriz de BC situamos un punto F tal que $M_aF = m_a$.
6. Con centro E y radio BF trazamos un arco que corta a al semicircunferencia con diámetro BE en G.
7. Hallamos un punto H sobre la perpendicular a BC por B tal que $BH = BG$.
8. La paralela por H a BC corta en J y K a la circunferencia con diámetro BC, siendo HJ menor o igual que HK.
9. Las circunferencias con centros en B y C, y radios HJ y HK se cortan en A, vértice del triángulo buscado. El punto A también está sobre la circunferencia de centro M_a y radio m_a.