Problema 802 de *triánguloscabri*. *Construir el triángulo cuyos datos son: a, m_a, $b-c$.*

Propuesto por Julián Santamaría Tobar.

Solución de *Francisco Javier García Capitán*. Fijando B y C sobre una recta tales que $BC = a$, el vértice A está en dos lugares geométricos: la circunferencia de centro M_a y radio m_a y la hipérbola con focos B y C y diámetro mayor $b-c$. Si podemos usar cónicas, esto da una solución al problema.

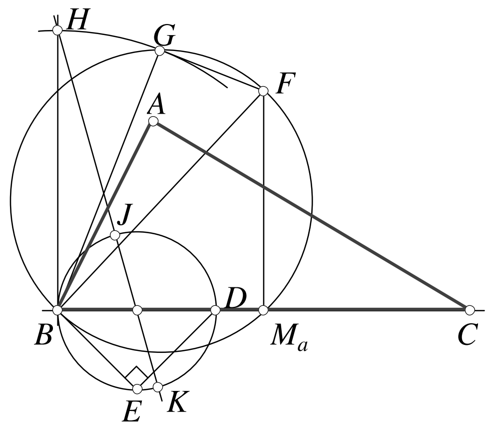
Para evitar el uso de cónicas, teniendo en cuenta la fórmula de la mediana

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

si expresamos $d = b-c$ y $bc = \lambda^2$, tenemos

$$\lambda^2 = \frac{(b^2+c^2)-(b-c)^2}{2} = \frac{2\left(m_a^2+\frac{a^2}{4}\right)-d^2}{2} = \left(m_a^2+\frac{a^2}{4}\right)-\frac{d^2}{2}.$$

Obtenemos b y $-c$ como soluciones de la ecuación $x^2-dx-\lambda^2=0$. Dados a, m_a y $d=b-c$ hacemos la siguiente construcción:



1. Sobre una recta cualquiera situamos dos puntos B y C, y hallamos su punto medio M_a.
2. Localizamos un punto D sobre BC tal que $BD = d$.
3. Construimos un triángulo isósceles BED con $E = 90°$.
4. Localizamos un punto F sobre la mediatriz de BC, tal que $M_aF = m_a$.
5. Hallamos un punto G sobre la circunfencia de diámetro BF tal que $FG = BE$.
6. Hallamos un punto H sobre la perpendicular a BC trazada por B tal que $BH = BG$.
7. Trazamos la recta que une H con el punto medio de BD, que corta a la circunferencia con diámetro BD en los puntos J y K ($HJ < HK$).
8. Las circunferencias con centros B y C y radios HJ y HJ se cortan en un punto A.