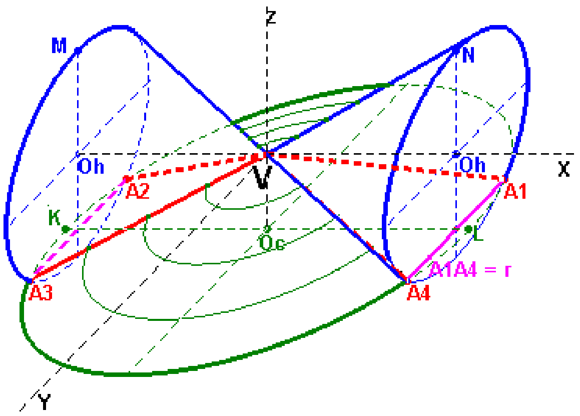
Problema 802
Construir el triángulo cuyos datos son: a, Ma, b-c.
Santamaría, J. (2017): Comunicación personal.

*Resuelto por JULIÁN SANTAMARÍA TOBAR profesor de Dibujo del IES La Serna de Fuenlabrada*

Por una parte, el lugar geométrico de los vértices A de un triángulo del que se conoce el lado a, y la diferencia de los otros dos lados (b-c), es una hipérbola. Por otra parte, el lugar geométrico de los vértices A de un triángulo del que se conoce el lado a y la mediana Ma es una circunferencia. El vértice A es la intersección de la hipérbola con la circunferencia, pero en Dibujo Técnico un punto únicamente se define por la intersección de rectas o circunferencias y los dibujos de las cónicas realizados en esta resolución solo son orientativos. Sin embargo, se puede lograr el punto de esta intersección con los útiles de dibujo.

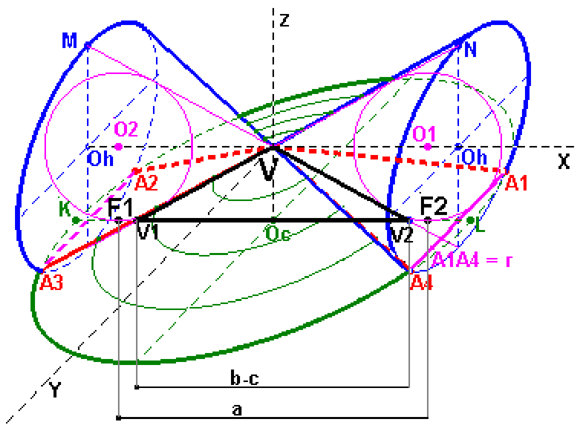
**[a, Ma, (b-c)]. Intersección de hipérbola y circunferencia concéntricas.**

Se va a considerar que la hipérbola y la circunferencia corresponden a la intersección del plano del dibujo con dos conos de revolución que tienen en común el mismo vértice V**.**




Antes de ver la resolución, se va analizar la posición espacial del problema. La intersección de dos conos que comparten el vértice son cuatro generatrices VA1, VA2, VA3, y VA4. Estas generatrices pertenecen a la superficie curva de los conos y para obtener estas soluciones hay que trabajar con intersecciones de planos que contienen las directrices, o sea, es necesario utilizar las rectas A1A4 y A2A3 = r, que proceden de intersecar los planos que contienen las directrices de ambos conos. ¿Qué condición deben tener los planos que contienen las directrices para intersecar los conos? Para que la recta r intersección de las directrices y las generatrices comunes a los dos conos, compartan los puntos A1A2, la longitud de todas las generatrices será la misma en ambos conos: VN = VM = VK = VL.

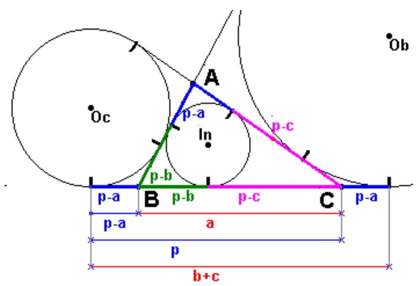
El plano del dibujo es paralelo al plano horizontal XVY y pasa por Oc. El plano del dibujo va a seccionar al cono, cuyo eje coincide con el eje z, en una circunferencia de centro Oc y radio Ma, y al cono, cuyo eje coincide con el eje horizontal x, en la hipérbola. La hipérbola no esta dibujada, pero una hoja pasa por los puntos A2-V1-A3 y la otra por los puntos A1-V2-A4.




De la sección hiperbólica se conocen los puntos V1 y V2 que son los vértices de la hipérbola y miden el eje real (la diferencia "b-c" de los lados del triángulo), y los focos F1 y F2 que miden la distancia focal (la magnitud del lado a del triángulo). Estos puntos son los elementos fundamentales de la cónica y también pertenecen al plano vertical XVZ que es perpendicular al plano del dibujo. Según el teorema de Dandelin, *"los focos de una cónica resultante de intersecar un plano con un cono de revolución son los puntos de tangencia del plano con las esferas inscritas en el cono";* Al cortar a este cono por el plano vertical XVZ, también corta diametralmente a las esferas de centros, O1 y O2, las cuales son tangentes al plano del dibujo en los focos F1 y F2.

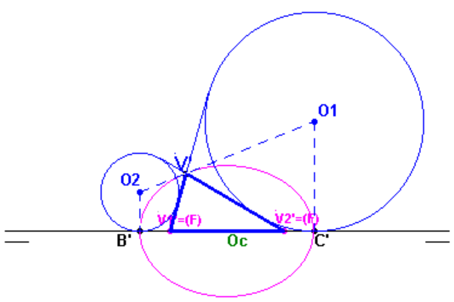
En el plano vertical XVZ está el triángulo V-V1-V2, ¿Qué datos se conocen de este triángulo? Teniendo en cuenta únicamente el cono que produce la sección hiperbólica, se conocen dos datos, la distancia de V1 a V2 que es el eje real de la hipérbola (b-c) y la distancia entre los puntos de tangencia F1F2 de las circunferencias exinscritas de centros O1 y O2 (que corresponden a las secciones diametrales de las esferas tangentes al cono y al plano del dibujo), siendo la distancia de F1 a F2 el lado a del triángulo.

¿En un triángulo ABC qué valor tiene la distancia del segmento tangente exterior a las circunferencias exinscritas con respecto a los lados? El valor del segmento tangente exterior a las exinscritas es la suma de los lados laterales b+c, como se puede ver en la figura.

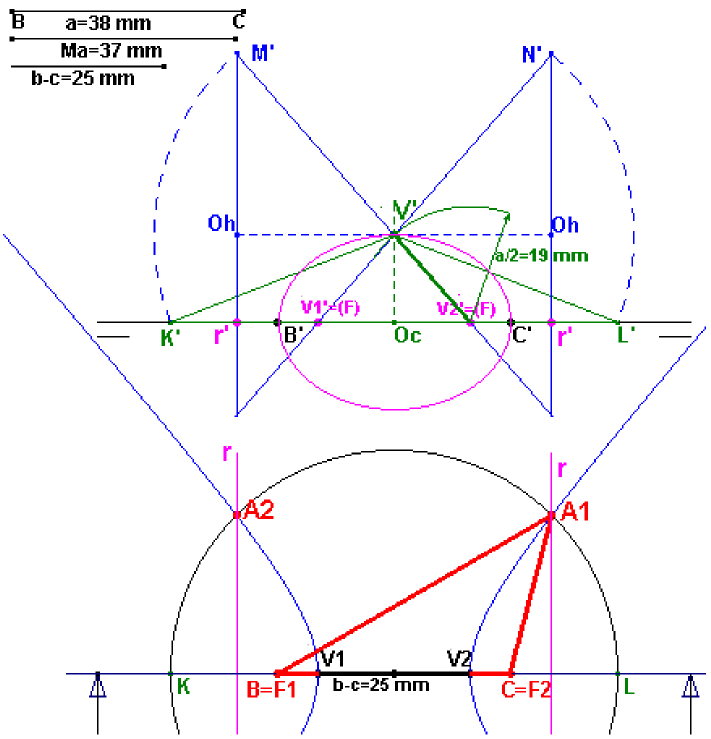



Volviendo al triángulo de la figura anterior V-V1-V2 del que conocemos la distancia V1V2 = b-c, y la distancia F1F2 = a = VV1+VV2. ¿Cuál es el lugar geométrico de los vértices V conociendo estos dos datos? El lugar geométrico de los vértices V cuya suma de distancias a dos puntos fijos, los puntos V1 y V2, es la contante VV1+VV2 = a, corresponde a una elipse de focos V1 y V2 y de vértices los puntos F1 y F2.

Por lo tanto si el vértice V del cono, solo dependiera del cono que produce la sección hiperbólica, estaría en cualquier punto de la elipse. Pero este vértice también depende el cono recto cuyo eje es el eje z, luego la posición del vértice V la figura es incorrecta porque este vértice V estará en la intersección del eje z (el eje del otro cono), con la elipse.




## Resolución del problema




En la resolución del problema hay que comenzar definiendo el vértice V común a los dos conos de revolución para que al intersecarse con el plano del dibujo, los resultados sean la hipérbola y la circunferencia.
El vértice V de los conos está en un plano perpendicular al plano del dibujo que pasa por el lado BC. El contenido de este plano se representa como si fuera la proyección vertical del sistema diédrico.
Por una parte, el vértice V está relacionado con la sección hiperbólica. Según el teorema de Dandelin, *"los focos de una cónica resultante de intersecar un plano con un cono de revolución son los puntos de tangencia del plano con las esferas inscritas en el cono";* por lo tanto, los focos de la hipérbola B=F1 y C= F2 son los puntos de tangencia de las esferas inscritas en el cono que produce esta sección hiperbólica. Al representar el plano perpendicular al plano del dibujo en la proyección vertical, se proyecta el triángulo V',V1',V2' del cual se conoce los vértices V1' y V2' que son los puntos de intersección de las generatrices del cono con el plano del dibujo (en la proyección vertical, el plano del dibujo es la línea de tierra), y también se conoce del triángulo V',V1',V2' los puntos de tangencia B' y C' de las circunferencias exincritas, puesto que son las secciones diametrales de las esferas tangentes al cono; la distancia de los puntos de tangencia B'C', de estas circunferencias exincritas, es la suma de los lados laterales (V',V1)+(V',V2'). Como de este triángulo se conoce un lado y la suma de los otros dos se deduce que el lugar geométrico de los vértices V', forman una elipse de vértices los puntos B' y C' (los focos de la sección hiperbólica) y los focos de esta elipse son los puntos V1'=(F) y V2'=(F) (los vértices de la sección hiperbólica).
Por otra parte, el vértice V está relacionado con el otro cono cuya directriz es la circunferencia de radio Ma. Como este cono es recto y de revolución, el vértice pertenece a la recta perpendicular al plano de dibujo. En la proyección vertical es una recta perpendicular la línea de tierra que coincide con el eje de simetría del dibujo.
Por lo tanto, el vértice V común a los dos conos estará en la intersección de la recta y la elipse, pero como la recta es el eje de simetría, la proyección V' del vértice coincide con el extremo del eje menor de la elipse, (la distancia del foco de la elipse (F) al extremo del eje menor, el vértice V', es el semieje mayor = lado BC/2). Al realizar la bisectriz de las generatrices del cono que forma la sección hiperbólica se obtiene su eje que es horizontal.
Para llevar a cobo la intersección de dos conos con el mismo vértice se toman directrices circulares (perpendiculares a sus respectivos ejes) de modo que las generatrices tengan la misma longitud. La longitud de las generatrices ha de ser la misma para que las generatrices comunes pasen por la recta de intersección de los planos que contienen las directrices.
Uno de los conos tiene como directriz la circunferencia de radio Ma, en la proyección vertical es el segmento K'L' que coincide con la línea, su generatriz es V'-L'. La directriz del otro cono está en un plano perpendicular al eje, pero como las generatrices de los dos conos han de ser iguales se lleva la magnitud V'-L' a las generatrices del otro cono, y resultan los puntos M' y N'. Por los puntos M y N se trazan los planos perpendiculares al eje, en este caso salen dos planos de perfil y las directrices circulares también se proyectan en segmentos. La intersección de los planos donde están las directrices son las dos rectas r' (en el alzado, la proyección vertical r' de cada recta, es un punto) que bajándolas a la proyección principal dan las dos rectas r que intersecadas con la circunferencia resultan las cuatro soluciones A1, A2, A3 y A4 del problema.