Problema 803

Construir el triángulo cuyos datos son: a, h_a, b+c.

Santamaría, J. (2017): Comunicación personal.

Resuelto por JULIÁN SANTAMARÍA TOBAR profesor de Dibujo del IES La Serna de Fuenlabrada

El problema se va a resolver por dos métodos. En el primero se va a utilizar la intersección de recta y elipse, y en el segundo, mediante las fórmulas de superficie, se van a transformar los datos del problema en otros datos equivalentes: a, Ha, (b+c) <=> a, p, r

Primer método: [a, Ha, (b+c)]. Intersección de elipse y recta.

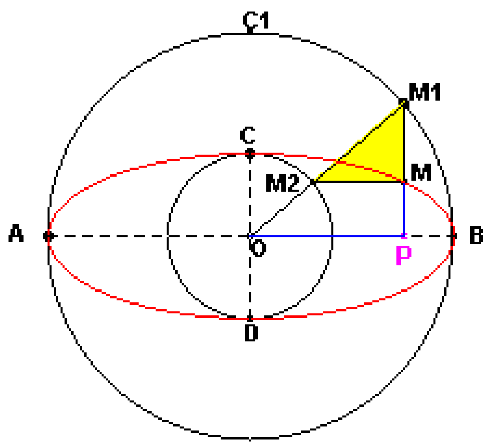
Por una parte, el lugar geométrico de los vértices A de un triángulo del que se conoce el lado a, y la suma de los otros dos lados (b+c), es una elipse. Por otra parte, el lugar geométrico de los vértices A de un triángulo del que se conoce el lado a y la altura Ha, es una recta paralela al lado distante la altura Ha. El vértice A es la intersección de la elipse con la recta, pero en Dibujo Técnico, un punto únicamente se define por la intersección de rectas o circunferencias y los dibujos de las cónicas realizados en esta resolución solo son orientativos. Sin embargo, la intersección de recta y cónica se puede lograr con los útiles de dibujo.

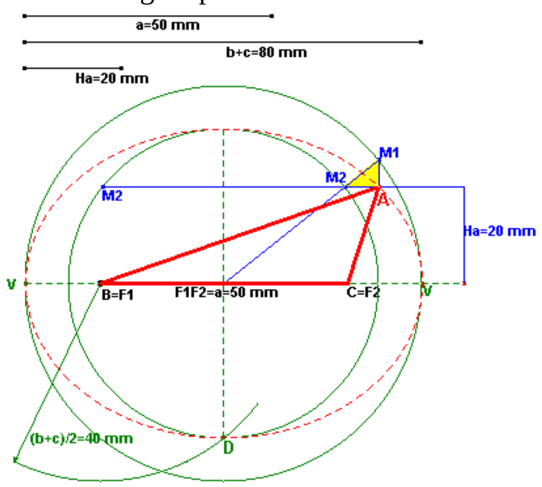
Por ser la recta, que se va a intersecar con la elipse, paralela al lado a, se puede utilizar un método particular que es más sencillo.

Previamente hay que considerar que el vértice M del triángulo rectángulo M1,M,M2 de la figura pertenece a la elipse. Si se establece una afinidad entre la elipse y circunferencia de diámetro el eje mayor AB, esta afinidad está definida por el eje AB, por la dirección de afinidad que es perpendicular al eje, y por la razón de afinidad que tiene el valor de la relación entre los semiejes de la elipse OD/OA. Como PM/PM1 = OM2/OM1= OD/OA, se justifica que el punto M es afín del punto M1 al tener la razón de afinidad planteada, y se concluye que el punto M pertenece a la elipse.

El triángulo rectángulo M, M, M2 tiene los catetos paralelos a los ejes, el valor de la hipotenusa es la diferencia de los semiejes (OA-OD) y al prolongar la hipotenusa el segmento OD coincide con el centro.

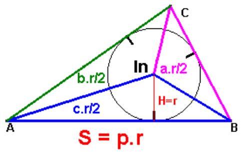
En la resolución del problema, se comienzan fijando los vértices del triángulo BC, que son los focos F1 y F2 de la elipse, y se sitúa el segmento (b+c) centrado con el anterior, que es el eje mayor de la elipse. Se hacen las dos circunferencias concéntricas cuyos diámetros son los ejes de la elipse (el mayor (b+c), y el menor se ha obtenido con un arco, teniendo en cuenta que la distancia de un foco al extremo D del eje menor es el semieje mayor (b+c)/2). Como el cateto M2M está en la recta paralela al lado a y distante la magnitud Ha, se comienza fijando el vértice M2, por este punto M2 se traza el radio en el que se encuentra la hipotenusa M2M1, y por último se obtiene el punto M que es el vértice A del triángulo pedido.





Segundo método: transformación de los datos en otros equivalentes: a,Ha,(b+c) <=> a,p,r

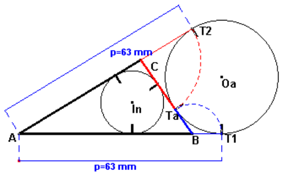
Antes de explicar la resolución, se recuerdan ciertas propiedades que se van a utilizar.



Expresión de la superficie S en función del semiperímetro p y el radio r de la circunferencia inscrita: **p . r = S** Justificación.

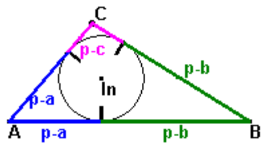
Si se descompone el triángulo ABC en otros tres mediante los segmentos formado por el incentro In y los tres vértices, el área S del triángulo ABC = a . r/2 + b . r/2 + c . r/2 = **p . r = S**

Distancia del vértice A, a los puntos de tangencia T1 y T2 de los lados del ángulo A con su circunferencia exinscrita de este ángulo A es el semiperímetro p. Justificación.



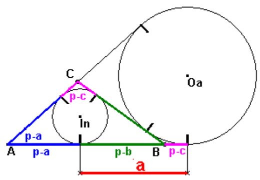
Los dos segmentos formados por un punto A y sus puntos de tangencia T1 y T2 con una circunferencia, tienen la misma longitud; como la suma de estos dos segmentos es el perímetro, (porque BT1=BTa y CT2=CTa), cada segmento mide el semiperímetro p.

Distancia del vértice A, a los puntos de tangencia de los lados del ángulo A con su circunferencia inscrita es (p-a). Justificación.



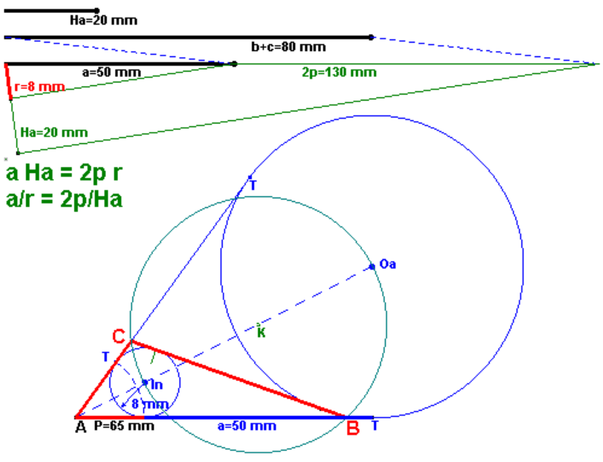
Los dos segmentos formados por un vértice y sus puntos de tangencia con la circunferencia inscrita, tienen la misma longitud, el perímetro queda dividido en tres parejas de segmentos, saliendo de cada vértice dos segmentos de la misma longitud; por lo tanto, al estar repetidos los tres segmentos, la suma de estos tres segmentos distintos es el semiperímetro p. En el lado BC están dos de ellos y suman la magnitud del lado a, el tercero medirá (p-a) y este segmento partirá del vértice A.

El segmento tangente exterior a las circunferencias inscrita y exincrita del ángulo A, mide el lado a. Justificación.



La distancia del vértice A, al punto de tangencia del lado del ángulo A con su circunferencia exinscrita de este ángulo A, es el semiperímetro p. El semiperímetro p = [(p-a)+(p-b)+(p-c)]. En la igualdad anterior al restar (p-a) a los dos miembros resulta: a = [(p-b)+(p-c)]

Resolución del ejercicio



Se comienza transformado los datos en sus equivalentes: a,Ha,(b+c) <=> a,p,r.

La transformación se basa en la formula de igualdad de áreas con la cual se obtiene el radio de la circunferencia inscrita r mediante una cuarta proporcional:

2 p r = a Ha => 2p/Ha = a/r

Se coloca el semiperímetro p desde el vértice A al punto de tangencia de su exinscrita T, y la distancia del lado a (siendo a, la distancia entre los puntos de tangencia de la inscrita y la exinscrita). Se sitúa la circunferencia inscrita y desde el vértice A se hace la otra tangente a la circunferencia inscrita. Después de hallar el centro de la circunferencia exinscrita Oa. Los vértices C y B se hallan con un arco capaz de 90º del segmento formado por los centros In y Oa, porque las dos bisectrices que parten de cada uno de estos vértices son perpendiculares y pasan por estos centros.

Nota de la transformación realizada en los datos del enunciado

Además de esta transformación: (a, Ha, (b+c) <=> a, p, r), se puede partir de otros enunciados para llegar a la resolución del problema a, p, r:

(a, Ha <=> a, S <=> Ha, S) y de 3º dato "r", "p", "b+c" =

= (S, r <=> S, p <=> r, p) y de 3º dato "a", "Ha", "b+c"