Problema 804.-
Construir el triángulo cuyos datos son $a,\ h_a,\ b-c$.

Santamaría, J. (2017): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Consideramos la suma de los segmentos $a\ y\ b-c$.
Entonces, $p-c=\frac{a+b-c}{2}$, donde $2p=a+b+c$.

Podemos así determinar r_c, radio de la circunferencia exinscrita, ya que
$(p-c)\,r_c=\frac{1}{2}a.h_a=S[ABC]\rightarrow r_c=\frac{a.h_a}{2(p-c)}$.

De igual forma, podemos considerar el segmento $p-b$, ya que $p-b+p-c=a$.

En definitiva, podemos construir $r_b=\frac{a.h_a}{2(p-b)}$.

De las relaciones $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}\ \ y\ \ S[ABC]=S=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$ obtenemos el sistema de ecuaciones:

$\begin{cases}\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}=\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\\ r\cdot r_a=\frac{S^2}{r_b\cdot r_c}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}r_a-r=\frac{(r_b+r_c)S^2}{(r_b\cdot r_c)^2}\\ r\cdot r_a=\frac{S^2}{r_b\cdot r_c}\end{cases}$, equivalente a la ecuación de segundo grado, de soluciones $r_a\ y\ (-r)$.

$$x^2-\frac{(r_b+r_c)S^2}{(r_b\cdot r_c)^2}x-\frac{S^2}{r_b\cdot r_c}=0.$$

Una vez determinado los valores de $r\ y\ r_a$, podemos determinar tanto $p-a$ y, por tanto el ángulo $\measuredangle A$.
De esta forma, resultará trivial la construcción del triángulo ABC.