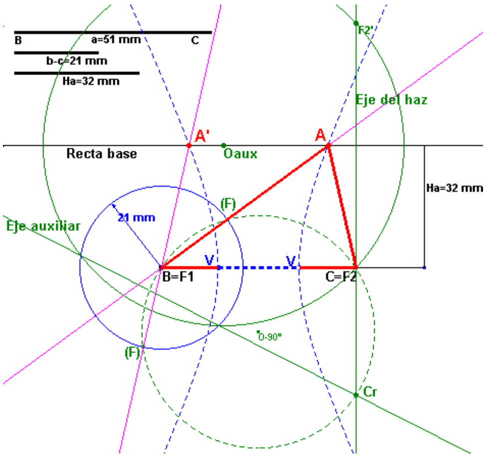
Problema 804
Construir el triángulo cuyos datos son: a, h_a, b-c.
Santamaría, J. (2017): Comunicación personal.

Resuelto por JULIÁN SANTAMARÍA TOBAR profesor de Dibujo del IES La Serna de Fuenlabrada

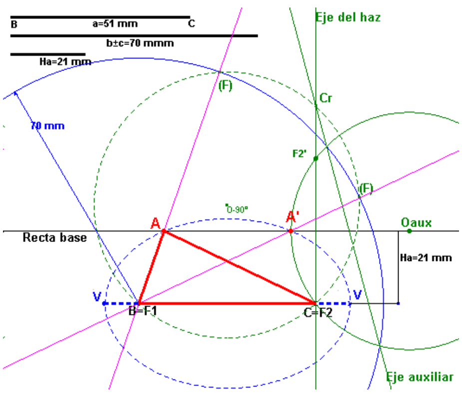
El problema se va a resolver por dos métodos. En el primero se va a utilizar la intersección de recta y cónica, y en el segundo, mediante las fórmulas de superficie, se van a transformar los datos del problema en otros datos equivalentes: a, Ha, (b-c) <=> Rb, (p-b), (p-c).

<u>1º método: [a, Ha, (b-c)]. Intersección de cónica y recta</u>.
Por una parte, el lugar geométrico de los vértices A de un triángulo del que se conoce el lado a, y la diferencia los otros dos lados (b-c), es una hipérbola. Por otra parte, el lugar geométrico de los vértices A de un triángulo del que se conoce el lado a y la altura Ha, es una recta paralela al lado a, distante la altura Ha. El vértice A es la intersección de la hipérbola con la recta, pero en Dibujo Técnico, un punto únicamente se define por la intersección de rectas o circunferencias y los <u>dibujos de las cónicas realizados en esta resolución solo son orientativos</u>. Sin embargo, la intersección de recta y cónica se puede lograr con los útiles de dibujo.

Una cónica se puede definir como el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que



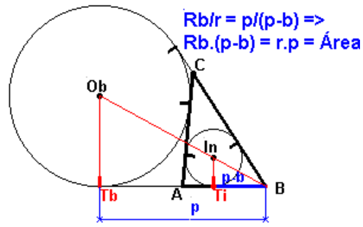
son tangentes la circunferencia focal de un foco y pasan por el otro foco. En la intersección de la recta (la recta base) y la cónica se trata de hallar el centro de la circunferencia que esté en la recta base, sea tangente a la focal del foco F1 y pase por el otro foco F2. Solo se halla el centro A, no se dibuja la circunferencia tangente.
Este problema es un problema de tangencias y se enuncia por tres datos relacionados con la circunferencia solución, no con el centro. Al hacer el simétrico de F2 con respecto a la recta base se obtiene el punto F2'. El enunciado del problema de tangencias seria: hallar la circunferencia que pase por dos puntos (F2 y F2') y sea tangente a la circunferencia focal de F1. En la resolución se utiliza el método de potencia, pero hay otros métodos basados en la inversión e incluso también se puede adaptar el método de Gergonne.
El método de potencia consiste en hallar el punto de tangencia de la focal con circunferencia tangente solución. En el problema, hay que considerar que los centros de las circunferencias que pasen por los dos puntos (F2 y F2') van a formar un haz coaxial o corradial, o sea, tienen un eje radical común a todas las circunferencias del haz (el Eje del Haz, el cual pasa por los dos puntos F2 y F2') y sus centros están en la recta base (la mediatriz de F2 y F2'). La circunferencia focal tendrá un eje radical auxiliar con cada una de las circunferencias del haz pero todos estos ejes radicales auxiliares van a pasar por el centro radical Cr, o sea, el centro radical Cr es el punto desde el cual se pueden hacer segmentos tangentes iguales a todas las circunferencias, a las del haz y a la focal. Al hacer el segmento tangente a la focal en los puntos (F) mediante un arco capaz de 90º se consigue el punto de tangencia de la focal con la circunferencia buscada.
<u>Este método sirve para intersecar recta con hipérbola o con elipse, puesto que (b±c) es eje</u>



<u>principal en ambos casos</u>. **Resolución.**
Se fija el lado BC, la recta paralela a una distancia Ha (la recta base), y la circunferencia focal de centro B y radio (b±c). Por C=F2 se hace una perpendicular a la recta base (el Eje del haz), se toma un centro Oaux cualquiera para hacer una circunferencia que pase por F2 con la condición de que corte a la focal para obtener el Eje auxiliar, que al cortarse con el Eje del haz, proporciona el centro radical Cr. Con diámetro Cr F1 se dibuja el arco capaz de 90º que corta a la focal en los puntos (F). La intersección de la recta F1 (F) con la recta base da la solución del vértice A.

2º método: transformación de los datos en otros equivalentes: a,Ha,(b-c)<=>Rb,(p-b),(p-c).

Antes de explicar la resolución, se recuerdan ciertas propiedades que se van a utilizar.

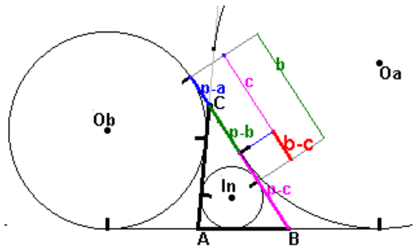


Expresión de la superficie S en función del radio de la circunferencia exinscrita Rb. Justificación.

Sean los triángulos semejantes Ob Tb B, y In Ti B al relacionar los catetos resulta:

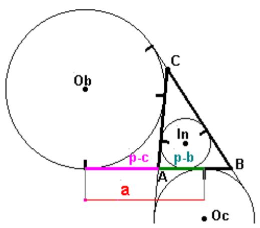
Rb/r = p/(p-b) => Rb.(p-b) = r . p = Área = a . Ha/2

La distancia entre los puntos de tangencia en el lado a, de la exinscrita del ángulo A y de la inscrita, es (b-c). Justificación.



El lado a se puede dividir por el punto de tangencia de la exinscrita de A que está a una distancia de (p-b) del vértice C, y a (p-c) del vértice B. Este lado a también se puede dividir por el punto de tangencia de inscrita cuyas distancias a los vértices son las contrarias, está a una distancia de (p-b) del vértice B y a (p-c) del vértice C. Luego estos puntos de tangencia son simétricos respecto del centro del lado.

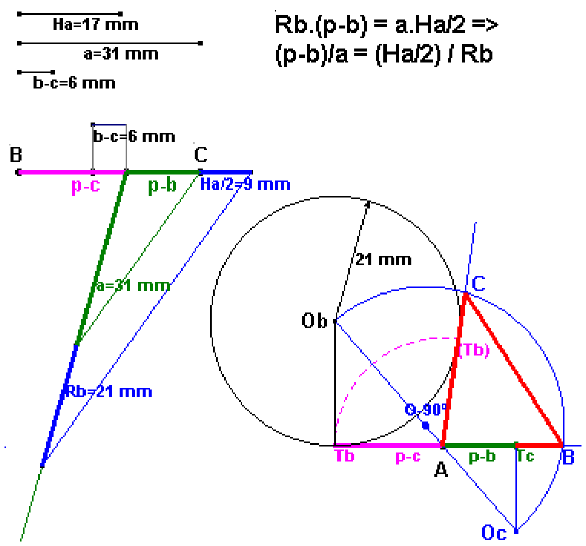
Al centrar el segmento (b-c) se obtienen los puntos de tangencia en este lado a, el de la exinscrita de A y el de la inscrita.



El segmento tangente interior formado por los puntos de tangencia de las exinscritas de B y C mide la magnitud del lado a. Justificación.

a = [(p-c) + (p-b)]

Resolución del ejercicio



Se comienza transformado los datos del enunciado en sus equivalentes: a,Ha,(b-c) <=> Rb, (p-b), (p-c).

En un segmento de magnitud el lado BC, se centra en segmento (b-c), con lo cual se divide la magnitud del lado a en (p-c) y en (p-b).

Mediante la formula de igualdad de áreas se obtiene el radio de la circunferencia exinscrita Rb utilizando una cuarta proporcional:

Rb.(p-b) = a.Ha/2 => (p-b)/a = (Ha/2) / Rb

Se fijan los nuevos datos Rb, (p-b), (p-c), situando el vértice A, los segmentos (p-c) y (p-b), y la circunferencia exinscrita de B.

Se dibuja la otra tangente a la circunferencia proporcionando el ángulo A. Se obtiene el centro Oc. Por último los vértices C y B se hallan con un arco capaz de 90º del segmento formado por los centros Ob y Oc, porque las dos bisectrices que parten de cada uno de estos vértices son perpendiculares y pasan por estos centros.