Problema 804

Construir un triángulo conocidos $a, h_a, b-c$.

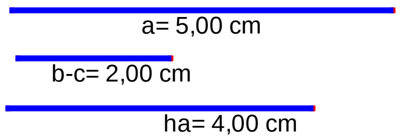
Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Aplicando el área del triángulo:

$a \cdot h_a = (a+b-c)r_c$, donde r_c es el radio de la circunferencia exinscrita al triángulo tangente al lado c.

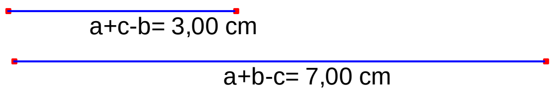
$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{2r_c}{a+b-c}.$$

Proceso de construcción:

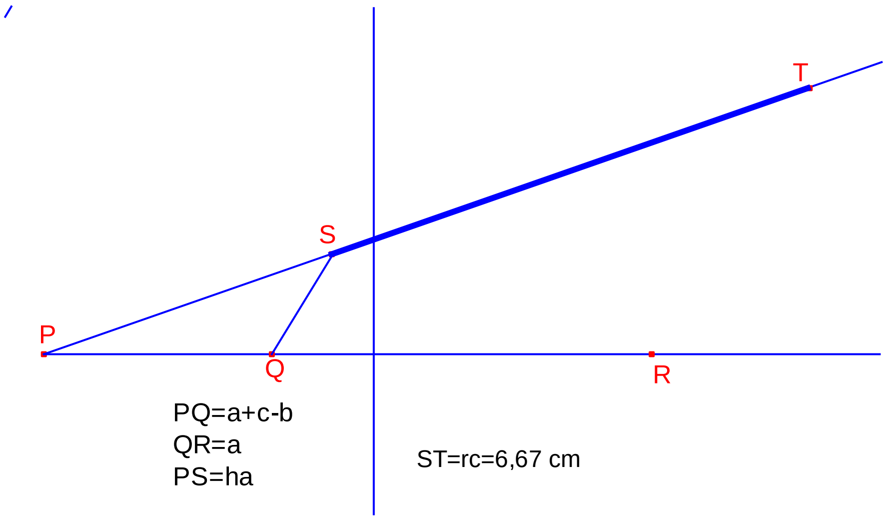


Sean conocidos $a, h_a, b-c$.

Construimos $a+c-b$ y $a+b-c$:

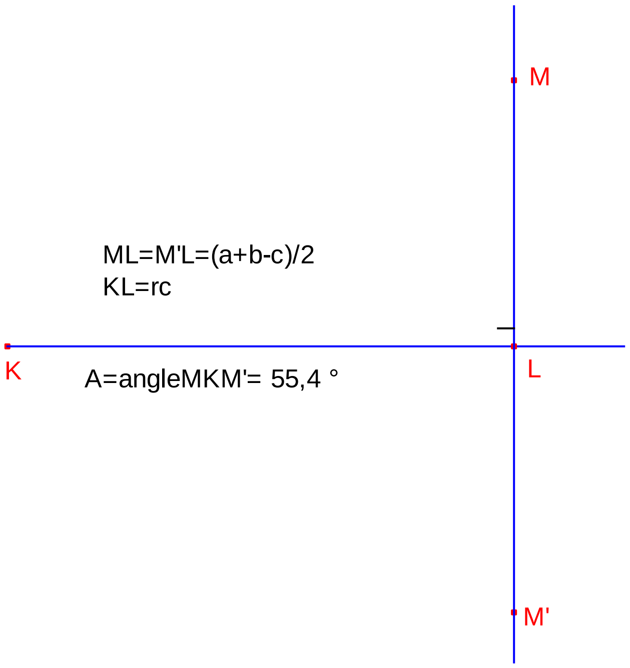


Construimos r_c como cuarto proporcional $\frac{a+c-b}{h_a} = \frac{a}{r_c}$:



Construimos el ángulo A, $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{2r_c}{a+b-c}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{a+b-c}{2r_c}$

.

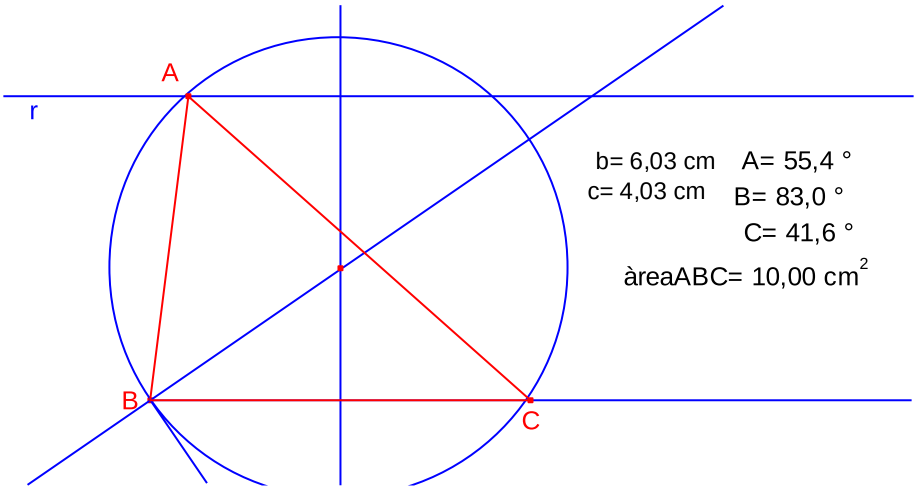


Dibujamos el lado $a=\overline{BC}$.

Dibujamos la recta r paralela a BC a una distancia h_a.

Dibujamos el arco capaz A sobre el segmento $\overline{BC}$.

Dibujamos el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$



Resolvemos el caso particular, algebraicamente:

Sea $a=5, b-c=2, h_a=4$.

Aplicando el área del triángulo:

$\frac{5\cdot 4}{2}=\frac{\sqrt{(7+2c)(2c-3)7\cdot 3}}{4}$. Resolviendo la ecuación:

$c=\frac{-42+5\sqrt{1785}}{42}\approx 4.0297$, entonces, $b=\frac{42+5\sqrt{1785}}{42}\approx 6.0297$.