Pr. Cabri 805

Enunciado

Si la recta de Euler es paralela al lado BC del triángulo, los ángulos B y C satisfacen tg B.tg C =3.

Coxeter, H.S.M. (1961, 1969).

Introduction to Geometry. Second Edition, (pag 18).

Solución

por César Beade Franco

Consideremos el triángulo de vértices A(p,q), B(0,0) y C(1,0).

La recta de Euler contiene al baricentro G $\left(\frac{p+1}{3}, \frac{q}{3}\right)$y al ortocentro H $\left(p, \frac{p-p^2}{q}\right)$. Si es paralela al lado BC entonces los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{GH}$ son proporcionales lo que significa que $\frac{p-p^2}{q}$ - $\frac{q}{3}$ = 0 $\Longrightarrow$ q = $\sqrt{3}\,\sqrt{p-p^2}$.

Si D (p,0) es el pie de la altura desde A,

tg B.tg C = $\frac{AD}{BD}\cdot\frac{AD}{CD}$ = $\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{p-p^2}}{p}\cdot\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{p-p^2}}{1-p}$ = 3.