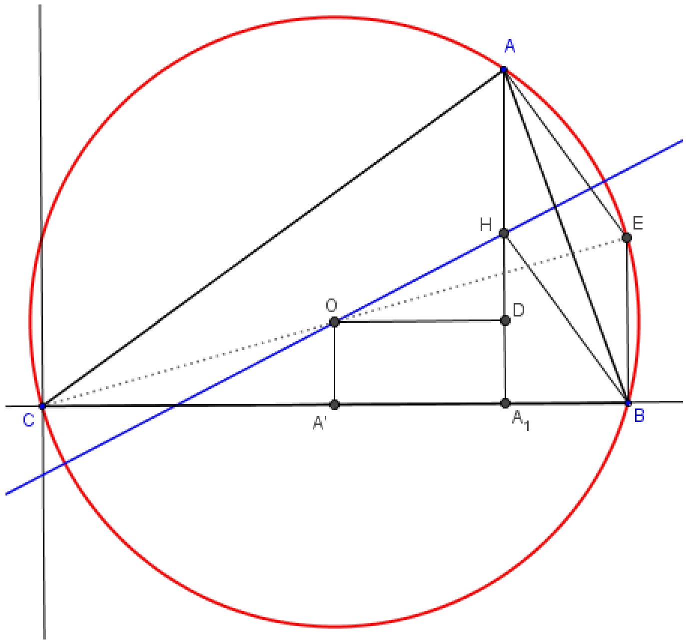
Problema 805.-
Si la recta de Euler es paralela al lado BC del triángulo, los ángulos B y C satisfacen $tg\ B \cdot tg\ C\ = 3$.

Coxeter, H.S.M. (1961, 1969): Introduction to Geometry. Second Edition, (pag 18)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



Sea la recta de Euler, recta que pasa por O (circuncentro) y H (ortocentro).
Esta recta determina con la altura $h_a = AA_1$ y con la recta paralela al lado $a = BC$ por O, el triángulo rectángulo ODH.

En este triángulo consideramos las siguientes relaciones:

$$tan\measuredangle HOD = \frac{HD}{OD} = \frac{AA_1 - AH - DA_1}{OD}$$

Los segmentos señalados se pueden expresar del modo siguiente:

$h_a = AA_1 = b \cdot sinC = 2R \cdot sinB \cdot sinC$
$AH = BE = 2 \cdot OA' = 2R \cdot cosA$
$DA_1 = OA' = R \cdot cosA$
$OD = \frac{a}{2} - A_1B = R \cdot sinA - c \cdot cosB = R \cdot sinA - 2R \cdot sinC \cdot cosB$

Por tanto,

$$tan\measuredangle HOD = \frac{2R \cdot sinB \cdot sinC - 3R \cdot cosA}{R \cdot sinA - 2R \cdot sinC \cdot cosB} = \frac{2sinB \cdot sinC - 3cosA}{sinA - 2sinC \cdot cosB}$$

Teniendo en cuenta que:
$cosA = \cos\left(180 - (B + C)\right) = -\cos(B + C)\,;\ sinA = \sin\left(180 - (B + C)\right) = \sin(B + C).$

$$tan\measuredangle HOD = \frac{2 \cdot sinB \cdot sinC - 3cosA}{sinA - 2sinC \cdot cosB} = \frac{3 \cdot cosB \cdot cosC - sinB \cdot sinC}{sinB \cdot cosC - sinC \cdot cosB} = \frac{3 - tanB \cdot tanC}{tanB - tanC}$$

Por tanto,

$$tan\measuredangle HOD = \frac{3 - tanB \cdot tanC}{tanB - tanC}.$$

$$tan\measuredangle HOD = 0 \Leftrightarrow tanB \cdot tanC = 3.$$

Así, la recta de Euler es paralela al lado BC del triángulo si y sólo los ángulos B y C satisfacen $tg\ B \cdot tg\ C\ = 3$.