Problema 805

Si la recta de Euler es paralela al lado $\overline{BC}$ del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, los ángulos B y C satisfacen que $tgB \cdot tgC = 3$.

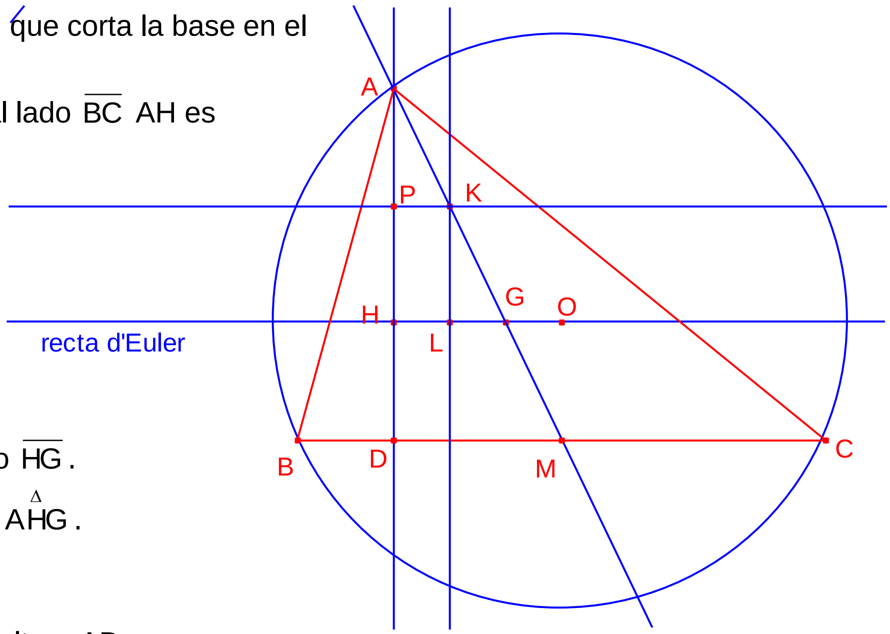
Coxeter, H.S.M. (1961, 1969): Introduction to Geometry. Second Edition, (pag 18)

Solución de Ricard Peiró:

La recta de Euler pasa por el baricentro G, el ortocentro H y el circuncentro O.

El baricentro está entre el ortocentro y el circuncentro y a doble distancia del ortocentro que del circuncentro.

Sea AH la altura sobre la base $\overline{BC}$ que corta la base en el punto D.



Por ser la recta de Euler paralela al lado $\overline{BC}$ AH es perpendicular a la recta de Euler.

Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$.

Por la propiedad del baricentro $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$.

Sea K el punto medio del segmento $\overline{AG}$.

Sea L el punto medio del segmento $\overline{HG}$.

KL es paralela media del triángulo $\overset{\Delta}{AHG}$.

$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AH}$.

Sea P la proyección de K sobre la altura AD.

$\overline{AK} = \overline{KG} = \overline{GM}$.

Entonces, $\overline{AP} = \overline{PH} = \overline{PD}$.

Sea $x = \overline{BD}$. Sea $\overline{HD} = y$

$\angle HBC = 90^o - C$, $\angle BHD = C$.

$$tgB = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{3y}{x}.$$

$$tgC = \frac{\overline{BD}}{\overline{HD}} = \frac{x}{y}.$$

$$tgB \cdot tgC = \frac{3y}{x}\frac{x}{y} = 3.$$