Problema 805
Si la recta de Euler es paralela al lado BC del triángulo, los ángulos B y C satisfacen tg B tg C =3
Coxeter, H.S.M. (1961, 1969): Introduction to Geometry. Second Edition, (pag 18)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et H l'orthocentre. Le point O se projette au milieu M de BC et H se projette en P sur la droite BC.
On pose BC = a, CA = b et AB = c, $\angle$BAC = **A**, $\angle$CBA = **B** et $\angle$ACB = **C**. Par convention et sans perte de généralité on pose a = 1

D'après la loi des sinus dans le triangle ABC, on a b/sin(**B**) = c = sin(**C**) = 1/sin(**B** + **C**)

Par ailleurs BP = c.cos(**B**) = sin(**C**)cos(**B**)/sin(**B**+**C**) et HP/BP = cos(**C**)/sin(**C**). D'où HP = cos(**B**).cos(**C**)/sin(**B**+**C**).

Enfin BM/OM = – tan(**B** + **C**) . Comme BM = 1/2, il en résulte que : OM = –1/2tan(**B** + **C**) = –cos(**B**+**C**)/2sin(**B**+**C**).

Si la droite d'Euler est parallèle au côté BC, alors O et H qui appartiennent à cette droite sont tels que HP = OM.

On en déduit 2cos(**B**).cos(**C**) = – cos(**B**+**C**) = –cos(**B**).cos(**C**) + sin(**B**).sin(**C**) qui s'écrite 3cos(**B**).cos(**C**) = sin(**B**).sin(**C**) équivalent après division des deux membres par cos(**B**).cos(**C**) supposés $\neq$ 0 (triangle ABC non rectangle en B ou en C) à tan(**B**).tan(**C**)= 3.