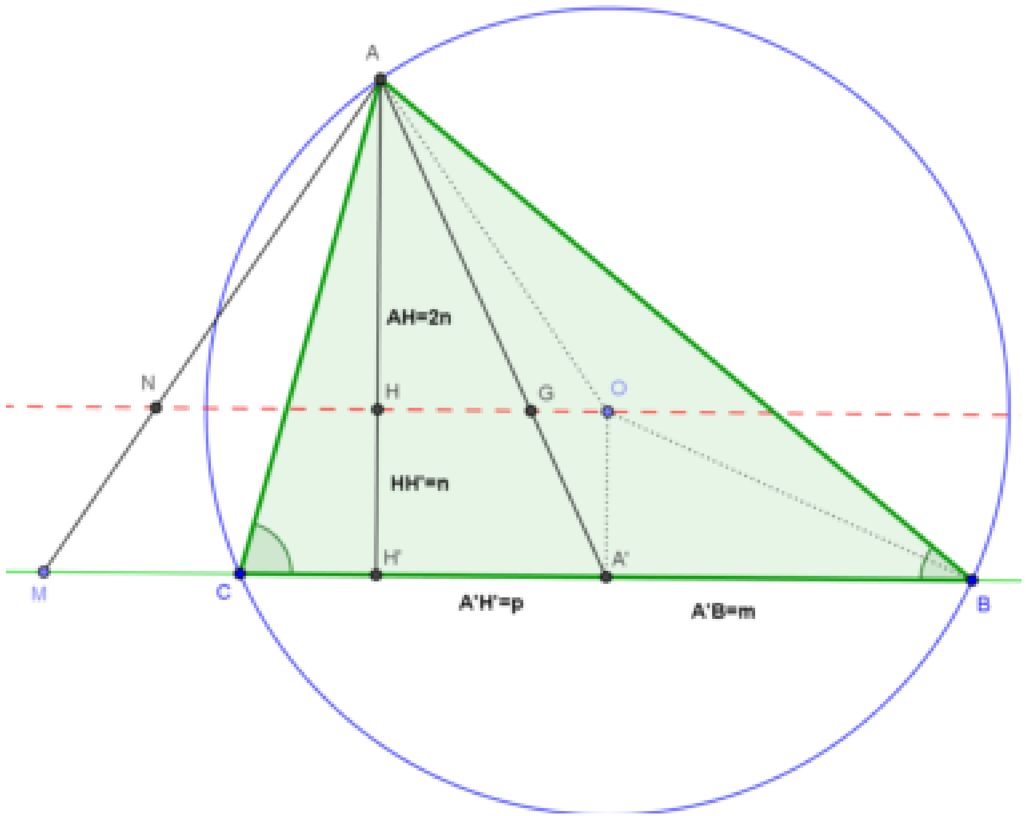
Quincena del 1 al 14 de febrero de 2017.

***Problema* 805**

9.- *Si la recta de Euler es paralela al lado BC del triángulo, los ángulos B y C satisfacen $tg\ B \cdot tg\ C\ = 3$.*

Coxeter, H.S.M. (1961, 1969): *Introduction to Geometry*. Second Edition, (pag 18)



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Sean H' y A' respectivamente, los pies de la altura y la mediana desde A.

Sea p la distancia entre ellos. Cualquiera que sea M sobre la recta BC, según la propiedad característica del baricentro, el segmento AN tiene longitud doble que el segmento NM.

Según esto, si la recta de Euler, (la que pasa por H, G y O) está a distancia n de la recta BC, llamando m a la mitad de la longitud de BC tendremos

$$tgB \cdot tgC = \frac{AH'^2}{CH' \cdot H'B} = \frac{9n^2}{(m-p)(m+p)} = \frac{9n^2}{m^2-p^2}.$$

Los triángulos rectángulos $OA'B$ y OAH tienen la misma hipotenusa, por tanto, $m^2+n^2=p^2+4n^2$, de donde $m^2-p^2=3n^2$ que llevado a la expresión de arriba dan $tgB \cdot tgC = 3$ como pretendíamos.■