TRIÁNGULOS CABRI

Problema 806. (propuesto por Philippe Fondanaiche) Dado un triángulo ABC con incentro I y A-excentro I_a, se considera el punto D de la recta AB tal que $AD = AC$. Si las rectas DI y DI_a cortan a la recta tangente en A a su circunferencia circunscrita en los puntos P y Q, respectivamente, probar que A es el punto medio del segmento PQ y que el cuadrilátero $PQDC$ es cíclico, siendo el punto A el centro de la circunferencia que lo circunscribe.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\left\{\begin{array}{l} D = (c-b : b : 0) \\ I = (a : b : c) \\ I_a = (-a : b : c) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} DI \equiv 0 = bcx + c(b-c)y - (a+b-c)z \\ DI_a \equiv 0 = bcx + c(b-c)y + (a-b+c)z \end{array}\right.$$

al ser la ecuación de su circunferencia circunscrita:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

y la ecuación de la recta tangente a ésta en el punto A:

$$t_a \equiv 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c^2y + b^2z$$

resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\left\{\begin{array}{l} P = DI \cap t_a = (b^2 - c^2 + ac : -b^2 : c^2) = \left(\dfrac{b^2 - c^2}{ac} + 1 : -\dfrac{b^2}{ac} : \dfrac{c}{a}\right) \\ Q = DI_a \cap t_a = (b^2 - c^2 - ac : -b^2 : c^2) = \left(1 - \dfrac{b^2 - c^2}{ac} : \dfrac{b^2}{ac} : -\dfrac{c}{a}\right) \end{array}\right.$$

por lo que el punto medio del segmento PQ es:

$$P + Q = (2 : 0 : 0) = A$$

Además, como la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo PDC es:

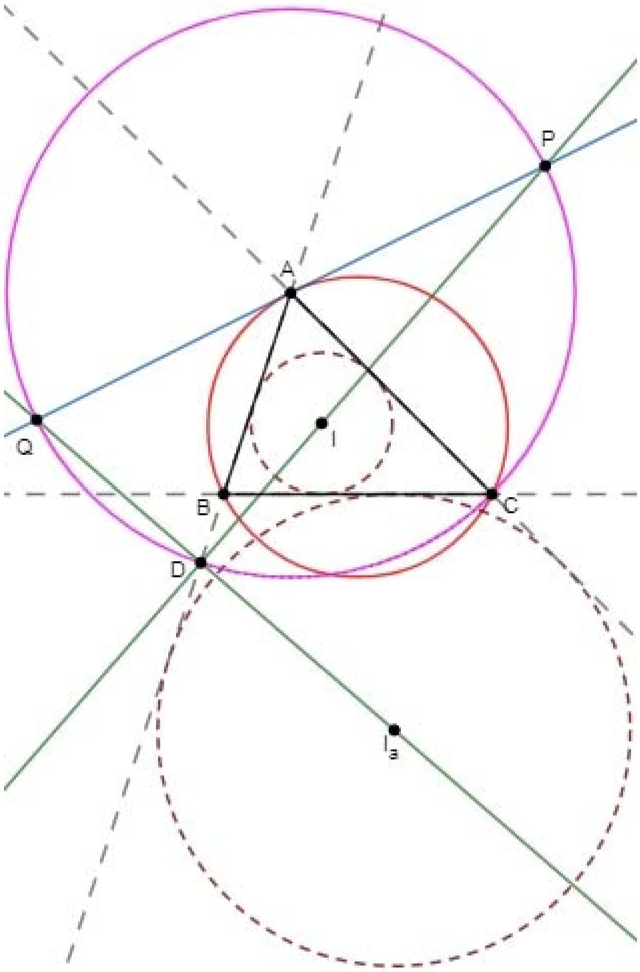
$$c^2xy + b^2xz + a^2yz + [b^2x + (b^2 - c^2)y](x + y + z) = 0$$

puede comprobarse, por simple sustitución, que el punto Q está situado sobre ella, ya que sus coordenadas verifican dicha ecuación. Por tanto, el cuadrilátero $PQDC$ es cíclico, estando las coordenadas del centro (conjugado de la recta del infinito) de la circunferencia que lo circunscribe determinado por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b^2 & 2b^2 & 2b^2 \\ 2b^2 & 2(b^2 - c^2) & a^2 + b^2 - c^2 \\ 2b^2 & a^2 + b^2 - c^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b^2 & 2b^2 & 2b^2 \\ 2b^2 & 2(b^2 - c^2) & a^2 + b^2 - c^2 \\ 2b^2 & a^2 + b^2 - c^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow \text{centro} = (1 : 0 : 0) = A$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI



Miguel-Ángel Pérez García Ortega