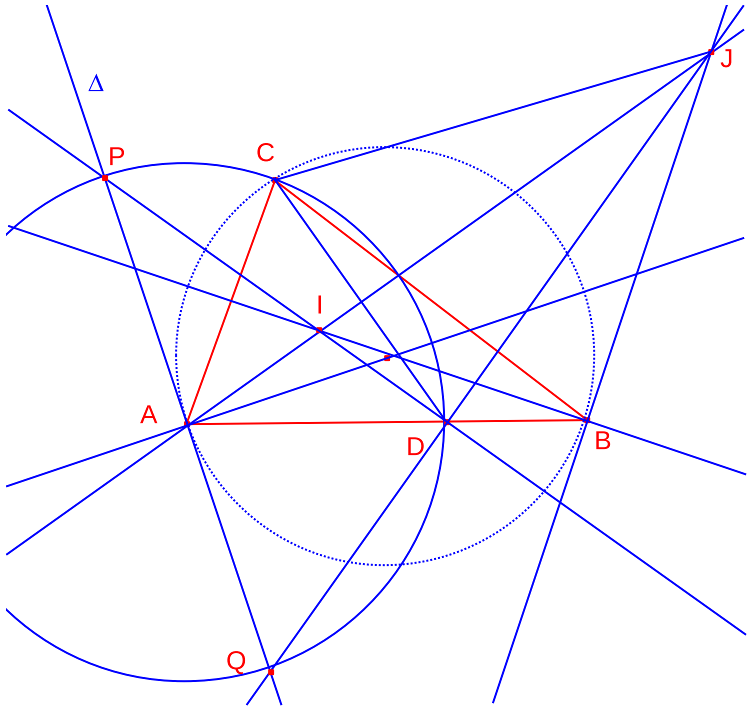
Problema 806

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb $\overline{AB} > \overline{AC}$, la recta $(\Delta)$ tangent en A al seu cercle circumscrit, I el centre del cercle inscrit i J el centre del exinscrit en el sector BAC.
Siga el punt D en el costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$.
Les rectes DI i DJ tallen la recta $(\Delta)$ en els punts P i Q, respectivament.
Demostreu que A és el punt mig de $\overline{PQ}$.

Solució de Ricard Peiró i Estruch.
Considerem la circumferència de centre A que passa per C i D.




La bisectriu AI és mediatriu del segment $\overline{CD}$,
$\angle PAB = 180^\circ - C$.
$\angle ACI = \angle ADI = \frac{C}{2}$.
Aleshores, $\angle APD = \frac{C}{2}$.
$\angle BAQ = C$.
Aleshores, P pertany a la circumferència de centre A que passa per C.

$\angle CJA = \angle DJA = \frac{B}{2}$
$\angle JAQ = \frac{A}{2} + C$.
Aleshores, $\angle AQD = 90 - \frac{C}{2}$.
$\angle DAP = 180^\circ - C$.
Aleshores, Q pertany a la circumferència de centre A que passa per C.
Per tant, $\overline{PQ}$ és un diàmetre, aleshores el centre A és el punt mig de $\overline{PQ}$.