Problema 806

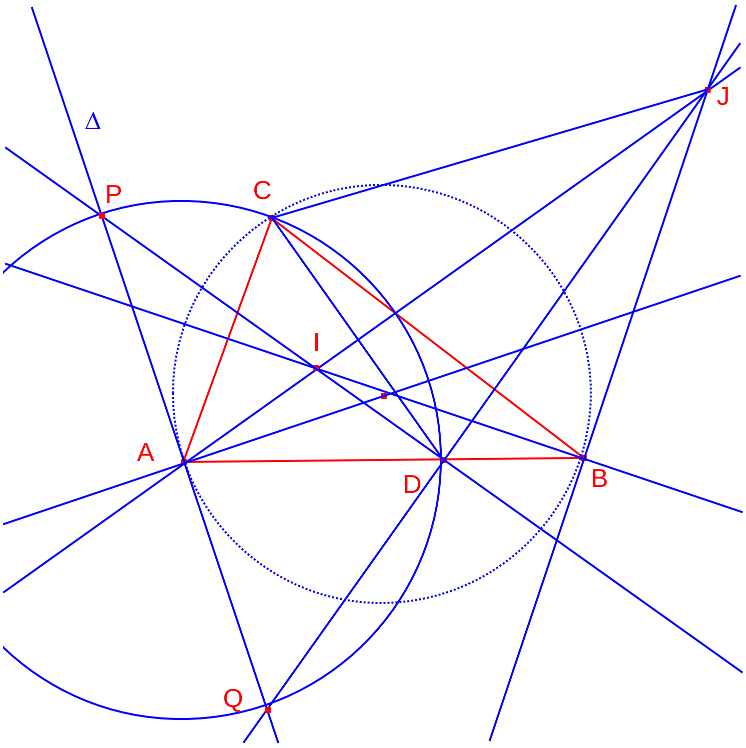
Sea un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ con $\overline{AB} > \overline{AC}$, la recta (Δ) tangente en A al círculo circunscrito, I el centro del círculo inscrito y J el centro del exinscrito en el sector BAC.

Sea el punto D en el lado $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$.

Las rectas DI y DJ cortan la recta (Δ) en los puntos P y Q, respectivamente.

Demostrar que A es el punto medio de $\overline{PQ}$.

Solucinó de Ricard Peiró i Estruch.



Consideremos la circunferencia de centro A que pasa per C y D.

La bisectriz AI es mediatriz del segmento $\overline{CD}$,

$\angle PAB = 180º{-}C$.

$\angle ACI = \angle ADI = \dfrac{C}{2}$.

Entonces, $\angle APD = \dfrac{C}{2}$.

$\angle BAQ = C$.

Entonces, P pertenece a la circunferencia de centro A que pasa por C.

$\angle CJA = \angle DJA = \dfrac{B}{2}$

$\angle JAQ = \dfrac{A}{2} + C$.

Entonces, $\angle AQD = 90 - \dfrac{C}{2}$.

$\angle DAP = 180º{-}C$.

Entonces, Q pertenece a la circunferencia de centro A que pasa per C.

Por tanto, $\overline{PQ}$ es un diámetro, entonces el centro A es el punto medio de $\overline{PQ}$.