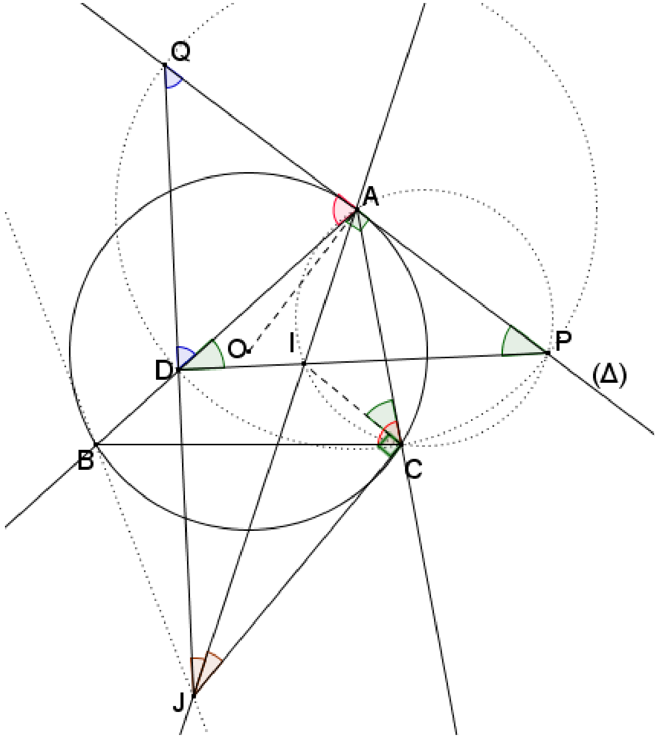
Problema 806.
Sean un triángulo ABC con AB> AC, la recta (Δ) tangente en A a su círculo circunscrito, I el centro del círculo inscrito y J el centro del excirculo en el sector BAC.
Sea el punto D dentro del lado AB tal que AD = AC. Las rectas DI y DJ encuentran la recta (Δ) a los puntos P y Q.
Demostrar que A es el medio de PQ.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Nous allons démontrer que AP = AQ = AD = AC..
1°) Le triangle ADP est isocèle de sommet A
Le point D étant le symétrique de C par rapport à la bissectrice AIJ de l'angle $\angle$BAC, on a $\angle$ACI = $\angle$ADI.
(Δ) étant tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC,on a (AB,(Δ)) = $\angle$BCA = 2$\angle$ACI.
Comme (AB,(Δ)) = $\angle$ADI + $\angle$APD, il en résulte $\angle$APD = 2$\angle$ACI – $\angle$ADI = $\angle$ACI = $\angle$ADI = $\angle$ADP.
D'où AP = AD. Cqfd.

2°) Le triangle ADQ est isocèle de sommet A
Les points C et D étant symétriques par rapport à la bissectrice ACJ, on a $\angle$AJD = $\angle$AJC.
Or $\angle$ADQ = $\angle$AJD + $\angle$DAI = $\angle$AJC + $\angle$CAI = (π/2 – $\angle$CIJ) + $\angle$CAI car les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\angle$ sont perpendiculaires entre elles.
D'où $\angle$ADQ = π/2 – $\angle$CAI – $\angle$ACI + $\angle$CAI = π/2 – $\angle$ACI
(Δ) étant tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC on a : $\angle$DAQ = $\angle$BCA = 2$\angle$ACI.
Il en résulte $\angle$AQD = π – 2$\angle$ACI – (π/2 – $\angle$ACI) = π/2 – $\angle$ACI = π/2 – $\angle$ACI = $\angle$ADQ.
D'où AQ = AD. Cqfd.